

NOTAS DE AULA DE TOPOLOGIA GERAL

TIAGO MACEDO

RESUMO. Essas notas de aula são fortemente baseadas nas Notas de Aula do Prof. Jorge Mujica e no livro *Topology* do Prof. James Munkres. As aulas estão estruturadas de forma que seja possível, para o(a)s estudantes, estudar o material de duas aulas a cada semana, e para o(a)s professore(a)s, expor o material de cada aula em duas horas. Os exercícios resolvidos foram resolvidos por Angie Estepa, Celso Domingos, Daniel Rojas, Israel Campos, Mateus dos Santos, Roger Garcia e Zyon Shiga.

AULA 1

Nesta aula, introduziremos os conceitos fundamentais dessa disciplina. Começaremos definindo o que é uma topologia e um espaço topológico, e depois ilustraremos essa definição abstrata com exemplos concretos. Em seguida, apresentaremos os espaços métricos, que constituem uma importante classe de exemplos de espaços topológicos, e verificaremos que todo espaço métrico é, de fato, um espaço topológico.

1.1. Espaços topológicos. O objetivo desta seção é apresentar a definição central dessa disciplina: a de espaço topológico. A ideia é axiomatizar, de maneira abstrata, as propriedades dos conjuntos abertos que já conhecemos, por exemplo, em $\mathbb{R}^n$. Começamos com as definições de topologia e de espaço topológico.

Definição 1.1 (de topologia e espaço topológico). Dado um conjunto X , uma **topologia** em X é uma família de subconjuntos $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\emptyset, X \in \tau$.
- (ii) Para toda subfamília $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, a união $\bigcup_{i \in I} A_i$ pertence a τ .
- (iii) Para todos $n > 0$ e $A_1, \dots, A_n \in \tau$, a interseção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ pertence a τ .

Um **espaço topológico** é um conjunto X munido de uma topologia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Neste caso, os conjuntos $A \in \tau$ são chamados de **abertos**, e os conjuntos $Z \subseteq X$ tais que $(X \setminus Z) \in \tau$ são chamados de **fechados**.

A definição acima é bastante abstrata. Para desenvolver intuição sobre ela, é útil considerar alguns exemplos concretos. Começamos pelos casos mais simples.

Exemplo 1.2. Conjunto vazio. Observe que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Assim, a única topologia possível no conjunto vazio é $\tau = \{\emptyset\}$.

Passando ao próximo caso, vejamos o que ocorre quando o conjunto possui exatamente um elemento.

Exemplo 1.3. Seja $X = \{\bullet\}$ um conjunto com um elemento. Observe que, nesse caso, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\}$. Pela condição (i) da Definição 1.1, qualquer topologia em X deve conter $\emptyset$ e X . Logo, a única topologia possível em X é $\tau = \{\emptyset, X\}$. Como

$$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \cap X = \emptyset \quad \text{e} \quad X \cap X = X,$$

obtemos que a condição (ii) da Definição 1.1 é satisfeita. Além disso, como

$$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \cup X = X \quad \text{e} \quad X \cup X = X,$$

segue que a condição (iii) da Definição 1.1 também é satisfeita. Isso mostra que τ é, de fato, uma topologia em X . Observe que, nesse caso, os conjuntos $\emptyset$ e X são ambos abertos e fechados ao mesmo tempo.

Vejamos agora o caso de um conjunto com dois elementos, que é o primeiro caso em que há mais de uma topologia possível.

Exercício 1.1. Seja $X = \{a, b\}$ um conjunto com dois elementos. Mostre que todas as possíveis topologias em X são:

- $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$,
- $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$,
- $\tau_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$,
- $\tau_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$.

Resolução (Angie). Pela condição (i) da Definição 1.1, qualquer topologia em X deve conter $\emptyset$ e X . Portanto, toda topologia em X é da forma $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$ é uma subfamília dos subconjuntos próprios não vazios de X . Como $\{\{a\}, \{b\}\}$ tem exatamente quatro subfamílias, há no máximo quatro candidatas a topologia em X . Vamos verificar que cada uma delas é, de fato, uma topologia.

Pelo Exemplo 1.5, a topologia trivial, $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.1. Pelo Exemplo 1.4, a topologia discreta, $\tau_4 = \mathcal{P}(X)$, satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.1.

Consideremos agora a família $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. A condição (i) é imediata. Para verificar as condições (ii) e (iii), basta observar que:

$$\begin{aligned} \emptyset \cap \emptyset &= \emptyset \in \tau_2, & \emptyset \cap \{a\} &= \emptyset \in \tau_2, & \emptyset \cap X &= \emptyset \in \tau_2, \\ \{a\} \cap \{a\} &= \{a\} \in \tau_2, & \{a\} \cap X &= \{a\} \in \tau_2, & X \cap X &= X \in \tau_2, \\ \emptyset \cup \emptyset &= \emptyset \in \tau_2, & \emptyset \cup \{a\} &= \{a\} \in \tau_2, & \emptyset \cup X &= X \in \tau_2, \\ \{a\} \cup \{a\} &= \{a\} \in \tau_2, & \{a\} \cup X &= X \in \tau_2, & X \cup X &= X \in \tau_2. \end{aligned}$$

As outras possíveis interseções e uniões entre os elementos de τ_3 seguem dessas. Portanto, τ_2 também é uma topologia em X .

Consideremos agora a família $\tau_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$. A condição (i) é imediata. Para verificar as condições (ii) e (iii), basta observar que:

$$\begin{aligned} \emptyset \cap \emptyset &= \emptyset \in \tau_3, & \emptyset \cap \{b\} &= \emptyset \in \tau_3, & \emptyset \cap X &= \emptyset \in \tau_3, \\ \{b\} \cap \{b\} &= \{b\} \in \tau_3, & \{b\} \cap X &= \{b\} \in \tau_3, & X \cap X &= X \in \tau_3, \\ \emptyset \cup \emptyset &= \emptyset \in \tau_3, & \emptyset \cup \{b\} &= \{b\} \in \tau_3, & \emptyset \cup X &= X \in \tau_3, \\ \{b\} \cup \{b\} &= \{b\} \in \tau_3, & \{b\} \cup X &= X \in \tau_3, & X \cup X &= X \in \tau_3. \end{aligned}$$

As outras possíveis interseções e uniões entre os elementos de τ_3 seguem dessas. Portanto, τ_3 também é uma topologia em X . □

Os exemplos acima são, evidentemente, muito simples. Para conjuntos maiores, a quantidade de topologias possíveis é naturalmente maior. Mas dois casos extremos de topologia que generalizam o exemplo anterior e, ao mesmo tempo, mostram que todo conjunto admite alguma topologia são: a topologia discreta e a topologia trivial.

Exemplo 1.4. Considere um conjunto X e $\tau = \mathcal{P}(X)$. Nesse caso, as condições (i)-(iii) da Definição 1.1 são claramente satisfeitas. Assim, $\tau = \mathcal{P}(X)$ é uma topologia em X . Observe que, nessa topologia, todo subconjunto de X é aberto e fechado ao

mesmo tempo. Essa é a maior topologia possível em X , e é chamada de **topologia discreta**.

No extremo oposto da topologia discreta, está a topologia que contém o menor número possível de abertos: a topologia trivial.

Exemplo 1.5. Considere um conjunto X e $\tau = \{\emptyset, X\}$. Nesse caso, as condições (i)-(iii) da Definição 1.1 também são claramente satisfeitas. Assim, $\tau = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia em X . Observe que, nessa topologia, os únicos abertos (e também os únicos fechados) são $\emptyset$ e X . Essa é a menor topologia possível em X , e é chamada de **topologia trivial**.

Os exemplos de espaços topológicos vistos até agora são bastante simples. Na próxima seção, apresentamos uma família muito mais rica e geometricamente significativa de exemplos: os espaços métricos, que generalizam a noção de distância e fornecem uma importante fonte de intuição para a topologia geral.

1.2. Espaços métricos. Nesta seção, vamos definir espaços métricos e estudar algumas de suas propriedades. Esses espaços são exemplos importantes de espaços topológicos, porque eles ajudam a construir intuição sobre espaços topológicos abstratos.

Definição 1.6 (de métrica e espaço métrico). Dado um conjunto X , uma **métrica** (ou uma **distância**) em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.
- (ii) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$, e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.
- (iii) (desigualdade triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Um **espaço métrico** é um par (X, d) , onde X é um conjunto (não vazio) e d é uma métrica em X .

O exemplo mais familiar de métrica é induzida pelo valor absoluto de números reais. Verificamos a seguir que ele satisfaz todos os axiomas da definição acima.

Exemplo 1.7. Considere o conjunto $X = \mathbb{R}$ e a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$. Verifiquemos que d é uma métrica em $\mathbb{R}$:

- (i) $d(x, y) = |x - y| = 0$ se, e somente se, $x - y = 0$, isto é, se, e somente se, $x = y$.
- (ii) $d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.
- (iii) Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$, temos que

$$d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z),$$

onde usamos a desigualdade triangular para o valor absoluto.

Isso mostra que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

O exemplo acima generaliza naturalmente para $\mathbb{R}^2$, onde a métrica euclidiana mede a distância usual entre dois pontos do plano.

Exemplo 1.8. Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ e a função $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_2((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Vamos verificar que d_2 é uma métrica em $\mathbb{R}^2$.

(i) Dados $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned} d_2((a_1, a_2), (b_1, b_2)) &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\ &= d_2((b_1, b_2), (a_1, a_2)). \end{aligned}$$

(ii) Dados $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que $d_2((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = 0$ se, e somente se, $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = 0$, o que ocorre se, e somente se, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$, isto é, se, e somente se, $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

(iii) Para verificar a desigualdade triangular, fixe $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ e escreva $u_i = a_i - b_i$ e $v_i = b_i - c_i$, de modo que $a_i - c_i = u_i + v_i$. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_2((a_1, a_2), (c_1, c_2))^2 &= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2) + 2(u_1 v_1 + u_2 v_2) + (v_1^2 + v_2^2) \\ &\leq (u_1^2 + u_2^2) + 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} + (v_1^2 + v_2^2) \\ &= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2} + \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \right)^2 \\ &= (d_2((a_1, a_2), (b_1, b_2)) + d_2((b_1, b_2), (c_1, c_2)))^2. \end{aligned}$$

Tomando raízes quadradas, como ambos os lados são não negativos, obtemos que

$$d_2((a_1, a_2), (c_1, c_2)) \leq d_2((a_1, a_2), (b_1, b_2)) + d_2((b_1, b_2), (c_1, c_2)).$$

Isso mostra que $(\mathbb{R}^2, d_2)$ é um espaço métrico. A métrica d_2 é chamada de **métrica euclidiana** em $\mathbb{R}^2$ e corresponde à distância usual entre dois pontos no plano.

Mais geralmente, a métrica euclidiana se generaliza para $\mathbb{R}^n$ em dimensão arbitrária. Existem, porém, outras métricas naturais em $\mathbb{R}^n$ além da euclidiana. As duas a seguir são especialmente úteis.

Exercício 1.2. Dado $n > 0$, considere o conjunto $\mathbb{R}^n$ e a função $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_1((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

Mostre que d_1 é uma métrica em $\mathbb{R}^n$. Essa métrica é conhecida como **métrica do táxi**.

Resolução (Celso). Vamos verificar que a função d_1 satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.6.

(a) Para todos $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$d_1(a, b) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| = d_1(b, a).$$

(b) Para todos $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que $d_1(a, b) \geq 0$, pois d_1 é determinada por uma soma de valores absolutos. Além disso, se $a \neq b$, existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a_i \neq b_i$. Isto implica que $|a_i - b_i| > 0$. Assim, como cada termo da soma $\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ é maior ou igual que zero (pois são valores absolutos), concluímos que, neste caso, $d_1(a, b) > 0$. No outro caso, ou seja, quando $a = b$, temos que $a_i = b_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo

$$d_1((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = 0 + \dots + 0 = 0.$$

(c) Para verificar a desigualdade triangular, observe que:

$$\begin{aligned} d_1(a, c) &= \sum_{i=1}^n |a_i - c_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i - b_i + b_i - c_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| + \sum_{i=1}^n |b_i - c_i| \\ &= d_1(a, b) + d_1(b, c), \end{aligned}$$

para todos $a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n), c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Além da métrica do táxi, outra métrica importante em $\mathbb{R}^n$ é a métrica do máximo, definida a seguir.

Exercício 1.3. Dado $n > 0$, considere o conjunto $\mathbb{R}^n$ e a função $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \max\{|a_i - b_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Mostre que d_∞ é uma métrica em $\mathbb{R}^n$. Essa métrica é chamada de **métrica do máximo** em $\mathbb{R}^n$.

Resolução (Daniel). Vamos verificar que d_∞ satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.6.

(i) Por definição, temos que

$$\begin{aligned} d_\infty(u, v) &= \max\{|u_1 - v_1|, \dots, |u_n - v_n|\} \\ &= \max\{|v_1 - u_1|, \dots, |v_n - u_n|\} \\ &= d_\infty(v, u), \end{aligned}$$

para todos $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Sejam $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Como $|u_i - v_i| \geq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e o máximo de diversos valores não negativos também é um valor não negativo, então $d_\infty(u, v) \geq 0$.

Agora, suponha que $d_\infty(u, v) = 0$, ou seja, suponha que

$$\max\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|, \dots, |u_n - v_n|\} = 0.$$

Como $|u_i - v_i| \geq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, isso implica que $|u_i - v_i| = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como consequência, obtemos que $u = v$.

(iii) Sejam $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Lembre que

$$d_\infty(u, w) = \max\{|u_1 - w_1|, |u_2 - w_2|, \dots, |u_n - w_n|\}.$$

Depois, denote por k um dos índice em $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$\max\{|u_1 - w_1|, |u_2 - w_2|, \dots, |u_n - w_n|\} = |u_k - w_k|.$$

Em seguida, observe que, pela desigualdade triangular do valor absoluto, temos que

$$|u_k - w_k| \leq |u_k - v_k| + |v_k - w_k|.$$

Como

$$|u_k - v_k| \leq \max\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|, \dots, |u_n - v_n|\}$$

e

$$|v_k - w_k| \leq \max\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|, \dots, |v_n - w_n|\},$$

segue que

$$\begin{aligned} d_\infty(u, w) &= \max\{|u_1 - w_1|, |u_2 - w_2|, \dots, |u_n - w_n|\} \\ &= |u_k - w_k| \\ &\leq |u_k - v_k| + |v_k - w_k| \\ &\leq \max\{|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|, \dots, |u_n - v_n|\} \\ &\quad + \max\{|v_1 - w_1|, |v_2 - w_2|, \dots, |v_n - w_n|\} \\ &= d_\infty(u, v) + d_\infty(v, w). \end{aligned}$$

□

Os exemplos anteriores são todos em $\mathbb{R}^n$. O exemplo a seguir mostra que qualquer conjunto pode ser munido de uma métrica, de maneira canônica.

Exemplo 1.9. Considere um conjunto não vazio X e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Vamos verificar que d é uma métrica em X . Para isso, sejam $x, y, z \in X$.

- (i) Temos que $d(x, y) = d(y, x)$, pois a definição de d depende apenas de x e y serem iguais ou distintos, o que é simétrico.
- (ii) Pela definição, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.
- (iii) Para verificar a desigualdade triangular, vamos separar em dois casos. Se $x = z$, então $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$, pois d é não negativa. Se $x \neq z$, então $d(x, z) = 1$. Nesse caso, $x \neq z$ implica que $y \neq x$ ou $y \neq z$ (pois, se $y = x$ e $y = z$, teríamos $x = z$, contradição). Portanto, $d(x, y) = 1$ ou $d(y, z) = 1$, e em qualquer situação $d(x, y) + d(y, z) \geq 1 = d(x, z)$.

Essa métrica é chamada de **métrica discreta** em X . A topologia induzida por d em X (conforme definiremos abaixo) coincidirá com a topologia discreta (construída no Exemplo 1.4).

Até agora, definimos espaços métricos e apresentamos alguns exemplos. Mas o objetivo desta seção, na verdade, é mostrar que todo espaço métrico é um espaço topológico. Para isso, precisamos primeiro definir os conceitos de bola aberta e de aberto em um espaço métrico.

Definição 1.10 (de abertos e fechados). Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $x \in X$ e $r \geq 0$, a **bola aberta** de centro em x e raio r é definida como sendo o subconjunto

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subseteq X,$$

e a **bola fechada** de centro em x e raio r é definida como sendo o subconjunto

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \subseteq X.$$

Além disso, um subconjunto $A \subseteq X$ é dito **aberto** quando, para todo $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$, e um subconjunto $Z \subseteq X$ é dito **fechado** quando $X \setminus Z$ é aberto.

A proposição a seguir mostra que os subconjuntos abertos de um espaço métrico satisfazem exatamente os axiomas de uma topologia, conforme a Definição 1.1. Em outras palavras, todo espaço métrico é um espaço topológico também.

Proposição 1.11. Seja (X, d) um espaço métrico.

- (a) Para todo $x \in X$ e $r > 0$, a bola aberta $B(x, r)$ é um subconjunto aberto de X .
- (b) Os subconjuntos $\emptyset$ e X são abertos em X .
- (c) Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de X , então $\bigcup_{i \in I} A_i$ também é um subconjunto aberto de X .
- (d) Se $A_1, \dots, A_n$ é uma família finita de subconjuntos abertos de X , então a interseção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ é um subconjunto aberto de X .

Demonstração. (a) Fixe $x \in X$ e $r > 0$. Seja $a \in B(x, r)$; então $d(x, a) < r$. Defina $r' = r - d(x, a) > 0$. Afirmamos que $B(a, r') \subseteq B(x, r)$. De fato, se $y \in B(a, r')$,

então $d(a, y) < r' = r - d(x, a)$, e pela desigualdade triangular,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < d(x, a) + r - d(x, a) = r.$$

Logo $y \in B(x, r)$, o que demonstra a afirmação.

- (b) O conjunto $\emptyset$ é aberto por vacuidade: a condição da Definição 1.10 é satisfeita trivialmente, pois não há nenhum elemento em $\emptyset$. O conjunto X é aberto pois, para quaisquer $a \in X$ e $r > 0$, temos $B(a, r) \subseteq X$.
- (c) Fixe uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos abertos de X . Se $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, então $a \in A_j$ para algum $j \in I$. Como A_j é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.
- (d) Fixe uma família finita $A_1, \dots, A_n$ de subconjuntos abertos de X . Se a pertence a $A_1 \cap \dots \cap A_n$, então $a \in A_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como cada A_i é aberto, existem $r_1, \dots, r_n > 0$ tais que $B(a, r_i) \subseteq A_i$ para cada i . Defina r_0 como $\min\{r_1, \dots, r_n\}$. Como $r_1, \dots, r_n > 0$, temos que $r_0 > 0$. Além disso, também temos que $B(a, r_0) \subseteq B(a, r_i) \subseteq A_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, $B(a, r_0) \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$. $\square$

Considere um espaço métrico (X, d) . Lembre da Definição 1.10 que um subconjunto $A \subseteq X$ é chamado de aberto quando, para todo $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$. Defina $\tau = \{A \subseteq X \mid A \text{ é aberto em } (X, d)\}$. Pela Proposição 1.11, essa família τ satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.1, e portanto é uma topologia em X . Essa topologia é chamada de **topologia induzida pela métrica d** .

No caso em que existe uma métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que τ é induzida pela métrica d , o espaço topológico (X, τ) é chamado de **metrizável**. Mas, como veremos ao longo dessa disciplina, em geral, topologias não são induzidas por métricas.

Exercício 1.4. Sejam X um conjunto não vazio e $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ a métrica discreta em X (ver Exemplo 1.9). Mostre que a topologia induzida por essa métrica é a topologia discreta (ver Exemplo 1.4).

Resolução (Israel). A métrica discreta d é definida por:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

A topologia induzida pela métrica d é dada por:

$$\tau_d = \{A \subseteq X \mid A \text{ é aberto em } (X, d)\}.$$

Um conjunto $A \subseteq X$ é aberto se, para todo $a \in A$, existe um raio $r > 0$ tal que a bola aberta $B(a, r)$ está contida em A .

Seja $A \subseteq X$ um subconjunto arbitrário. Vamos mostrar que A é aberto na topologia τ_d . Para isso, tome $a \in A$ qualquer. Analisemos as bolas abertas na métrica discreta. Para um raio r com $0 < r \leq 1$, temos que:

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\} = \{a\},$$

pois se $x \neq a$, então $d(a, x) = 1 \geq r$. Assim, a bola aberta de raio r (com $0 < r \leq 1$) reduz-se ao conjunto unitário $\{a\}$. Isso mostra que todo ponto $a \in A$ possui uma bola aberta centrada nele que está inteiramente contida em A . Consequentemente, A é aberto em (X, d) .

Como $A \subseteq X$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que todo subconjunto de X é aberto. Ou seja, $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ é exatamente a topologia discreta em X . $\square$

Exercício 1.5. Dê um exemplo de um espaço métrico (X, d) e uma família de subconjuntos abertos $\{A_i\}_{i \in I}$ em X , tais que $\cap_{i \in I} A_i$ não é aberto; ou, equivalentemente, uma família de subconjuntos fechados $\{Z_i\}_{i \in I}$ tais que $\cup_{i \in I} Z_i$ não é fechado.

AULA 2

Na aula anterior, definimos topologias e espaços topológicos, e apresentamos os primeiros exemplos, incluindo os espaços métricos. Nesta aula, estudaremos outras maneiras de definir e de construir topologias. Começaremos mostrando que uma topologia pode ser equivalentemente descrita por meio de seus conjuntos fechados, em lugar de seus abertos. Em seguida, introduziremos as noções de subbase e de base de uma topologia, que oferecem uma forma mais econômica e flexível de construir uma topologia, gerando-a a partir de famílias menores de abertos.

2.1. Topologias via conjuntos fechados. O objetivo desta seção é apresentar uma maneira equivalente de definir topologias: em vez de especificar os conjuntos abertos, podemos especificar os conjuntos fechados. Essa abordagem é útil em diversas situações, como na definição da topologia cofinita e da topologia de Zariski. O lema a seguir será usado para demonstrar uma proposição que torna essa equivalência precisa.

Lema 2.1. Sejam X um conjunto e $\{Y_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de X .

- (a) $X \setminus (\cup_{i \in I} Y_i) = \cap_{i \in I} (X \setminus Y_i)$.
- (b) $X \setminus (\cap_{i \in I} Y_i) = \cup_{i \in I} (X \setminus Y_i)$.

Demonstração. (a) Vamos começar mostrando que $X \setminus (\cup_{i \in I} Y_i) \subseteq \cap_{i \in I} (X \setminus Y_i)$. Se $x \in X$ e $x \notin \cup_{i \in I} Y_i$, então $x \notin Y_i$ para todo $i \in I$. (Caso contrário, se $x \in Y_i$ para algum $i \in I$, então $x \in \cup_{i \in I} Y_i$.) Isso implica que $x \in X \setminus Y_i$ para todo $i \in I$; ou seja, $x \in \cap_{i \in I} (X \setminus Y_i)$.

Agora vamos mostrar que $\cap_{i \in I} (X \setminus Y_i) \subseteq X \setminus (\cup_{i \in I} Y_i)$. Se $x \in \cap_{i \in I} (X \setminus Y_i)$, então $x \in X$ e $x \notin Y_i$, para todo $i \in I$. Logo $x \notin \cup_{i \in I} Y_i$ (caso contrário, x pertenceria a Y_i para algum $i \in I$). Isso significa que $x \in X \setminus (\cup_{i \in I} Y_i)$.

- (b) Vamos começar mostrando que $X \setminus (\cap_{i \in I} Y_i) \subseteq \cup_{i \in I} (X \setminus Y_i)$. Se $x \in X \setminus (\cap_{i \in I} Y_i)$, então $x \notin \cap_{i \in I} Y_i$. Isso implica que existe $i \in I$, tal que $x \notin Y_i$. Logo $x \in X \setminus Y_i$ para algum $i \in I$; ou seja, $x \in \cup_{i \in I} (X \setminus Y_i)$.

Agora vamos mostrar que $\cup_{i \in I} (X \setminus Y_i) \subseteq X \setminus (\cap_{i \in I} Y_i)$. Se $x \in \cup_{i \in I} (X \setminus Y_i)$, então $x \in X \setminus Y_i$ para algum $i \in I$. Isso implica que $x \notin Y_i$ para algum $i \in I$. Logo $x \notin \cap_{i \in I} Y_i$. (Caso contrário, x pertenceria a Y_i para todo $i \in I$.) Isso mostra que $x \in X \setminus (\cap_{i \in I} Y_i)$. $\square$

Proposição 2.2. Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X . Se $\mathcal{F}$ satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,
- (ii) para toda subfamília $\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$, a interseção $\cap_{i \in I} Z_i$ pertence a $\mathcal{F}$,
- (iii) para todos $n > 0$ e $Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{F}$, a união $Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ pertence a $\mathcal{F}$,

então $\tau := \{X \setminus Z \mid Z \in \mathcal{F}\}$ é uma topologia em X , e os elementos de $\mathcal{F}$ são exatamente os fechados de (X, τ) .

Demonstração. Vamos mostrar que τ satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.1.

- (i) Como $X \in \mathcal{F}$ e $\emptyset \in \mathcal{F}$, então $\emptyset = X \setminus X \in \tau$ e $X = X \setminus \emptyset \in \tau$.
- (ii) Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família arbitrária de membros de τ . Pelo Lema 2.1(a), temos que $X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$. Por construção, $A_i \in \tau$, e consequentemente, $(X \setminus A_i) \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$. Pela hipótese (ii), temos que $\bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \in \mathcal{F}$. Isso implica que $X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) \in \mathcal{F}$, e consequentemente, que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
- (iii) Seja $A_1, \dots, A_n$ uma família finita de membros de τ . Pelo Lema 2.1(b), temos que $X \setminus (A_1 \cap \dots \cap A_n) = (X \setminus A_1) \cup \dots \cup (X \setminus A_n)$. Agora, por construção, $(X \setminus A_1), \dots, (X \setminus A_n) \in \mathcal{F}$. Pela hipótese (iii), $(X \setminus A_1) \cup \dots \cup (X \setminus A_n) \in \mathcal{F}$. Isso implica que $X \setminus (A_1 \cap \dots \cap A_n) \in \mathcal{F}$, e consequentemente, $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$. $\square$

A proposição acima é uma ferramenta conveniente para definir topologias diretamente por meio de seus fechados, sem precisar verificar os axiomas de aberto. Vamos ver dois exemplos dessa construção, começando com a chamada *topologia cofinita*.

Exemplo 2.3. Dado um conjunto X , defina

$$\mathcal{F} := \{Z \subseteq X \mid Z = X \text{ ou } Z \text{ é finito}\}.$$

Vamos verificar que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições (i)-(iii) da Proposição 2.2.

- (i) O conjunto $X \in \mathcal{F}$ por definição, e $\emptyset \in \mathcal{F}$ pois $\emptyset$ é finito.
- (ii) Seja $\{Z_i\}_{i \in I}$ uma subfamília arbitrária de $\mathcal{F}$. Se $I = \emptyset$, então $\bigcap_{i \in I} Z_i = X \in \mathcal{F}$. Se $I \neq \emptyset$ e $Z_i = X$ para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i \in I} Z_i = X$. Caso contrário, ou seja, se $I \neq \emptyset$ e existir $j \in I$ tal que $Z_j \neq X$, podemos fixar tal $j \in I$, de modo que $\bigcap_{i \in I} Z_i \subseteq Z_j$. Como $Z_j \in \mathcal{F}$ e $Z_j \neq X$, então Z_j é finito, e consequentemente, $\bigcap_{i \in I} Z_i$ também é finito. Em todos os casos possíveis, obtemos que $\bigcap_{i \in I} Z_i \in \mathcal{F}$.
- (iii) Sejam $n > 0$ e $Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{F}$. Se algum $Z_k = X$, então $Z_1 \cup \dots \cup Z_n = X \in \mathcal{F}$. Caso contrário, todo Z_k é finito. Isso implica que $Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ também é finito e portanto pertence a $\mathcal{F}$.

Pela Proposição 2.2, $\tau := \{X \setminus Z \mid Z \in \mathcal{F}\} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ é finito}\}$ é uma topologia em X , chamada de *topologia cofinita*. Nessa topologia, os abertos não vazios são exatamente os subconjuntos de X cujo complementar é finito.

No próximo exemplo, vamos usar novamente o resultado da Proposição 2.2 para construir uma topologia. Essa topologia tem natureza mais algébrica, surge naturalmente no contexto da geometria algébrica, e é conhecida como *topologia de Zariski*.

Exemplo 2.4. Dado um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}[x, y]$ de polinômios em duas variáveis com coeficientes reais, defina o *conjunto de zeros* de S como sendo

$$V(S) := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a, b) = 0 \text{ para todo } f \in S\},$$

e defina a família

$$\mathcal{F} := \{V(S) \mid S \subseteq \mathbb{R}[x, y]\}.$$

Vamos verificar que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições (i)-(iii) da Proposição 2.2.

(i) Como o polinômio constante 1 não possui zeros, temos que $\emptyset = V(\{1\}) \in \mathcal{F}$. Além disso, como o polinômio constante 0 se anula em todo ponto, temos que $\mathbb{R}^2 = V(\{0\}) \in \mathcal{F}$.

(ii) Seja $\{V(S_i)\}_{i \in I}$ uma subfamília arbitrária de $\mathcal{F}$. Então

$$\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right),$$

pois um ponto anula todos os polinômios de todo S_i se, e somente se, anula todos os polinômios de $\bigcup_{i \in I} S_i$. Logo $\bigcap_{i \in I} V(S_i) \in \mathcal{F}$.

(iii) Sejam $n > 0$ e $V(S_1), \dots, V(S_n) \in \mathcal{F}$. Então

$$V(S_1) \cup \dots \cup V(S_n) = V(S_1 \cdot S_2 \cdots S_n),$$

onde $S_1 \cdot S_2 \cdots S_n := \{f_1 f_2 \cdots f_n \mid f_i \in S_i \text{ para todo } i\}$. De fato, um ponto $a \in \mathbb{R}^2$ pertence a $V(S_i)$ para algum i se, e somente se, $f_1(a) \cdots f_n(a) = 0$ para todos $f_i \in S_i$; o que ocorre se, e somente se, $a \in V(S_1 \cdot S_2 \cdots S_n)$. Logo $V(S_1) \cup \dots \cup V(S_n) \in \mathcal{F}$.

Pela Proposição 2.2, $\mathcal{F}$ define uma topologia em $\mathbb{R}^2$, chamada de **topologia de Zariski**. Nessa topologia, os fechados são exatamente os conjuntos de zeros de famílias de polinômios em duas variáveis.

Os dois exemplos acima ilustram bem a utilidade da Proposição 2.2: em vez de verificar os axiomas de topologia diretamente sobre os abertos, basta exibir uma família de fechados satisfazendo as condições (i)-(iii) e concluir que ela determina uma topologia. O exercício a seguir mostra que essa correspondência é, na verdade, uma bijeção: a família de fechados de uma topologia a determina de forma única.

Exercício 2.1. Seja X um conjunto e seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma família satisfazendo as condições (i)-(iii) da Proposição 2.2. Mostre que $\tau = \{X \setminus Z \mid Z \in \mathcal{F}\}$ é a única topologia em X cujos fechados são exatamente os elementos de $\mathcal{F}$.

Resolução (Mateus). Sejam τ_1 e τ_2 duas topologias em X e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma família satisfazendo as condições (i)-(iii) da Proposição 2.2. Suponha também que $\mathcal{F}$ é a família de fechados das topologias τ_1 e τ_2 . Vamos mostrar que $\tau_1 = \tau_2$.

Vamos começar mostrando que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Para isso, seja $A \in \tau_1$. Como o complementar de um conjunto aberto é um conjunto fechado, então $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ também é a coleção de conjuntos fechados da topologia τ_2 , e como o complementar de um conjunto fechado é um conjunto aberto, temos que $A = X \setminus (X \setminus A) \in \tau_2$. Portanto, $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

A demonstração de que $\tau_2 \subseteq \tau_1$ é completamente análoga. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$ e $\tau_2 \subseteq \tau_1$, segue que $\tau_1 = \tau_2$. $\square$

2.2. Bases de topologias. Em muitas situações, é conveniente descrever uma topologia não pela totalidade dos seus abertos, mas por uma família menor que os “gera”. Por exemplo, a topologia euclidiana em $\mathbb{R}^n$ pode ser descrita simplesmente pelas bolas abertas, que formam uma base dessa topologia. Esta seção formaliza essa ideia, introduzindo as noções de subbase e de base de uma topologia.

Definição 2.5 (de subbase e base de topologia). Dado um conjunto X , uma **subbase de uma topologia** em X é uma família $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$. Uma **base de uma topologia** em X é uma subbase $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de uma topologia em X tal que: para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Observe que toda base é uma subbase de uma topologia, e que toda topologia é uma base de uma topologia. O próximo resultado nos dá uma forma de construir uma base a partir de uma subbase, e de construir uma topologia a partir de uma base de uma topologia.

Lema 2.6. Seja X um conjunto.

(a) Se $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma subbase de uma topologia em X , então

$$[\mathcal{S}] := \{S_1 \cap \cdots \cap S_n \mid n > 0, S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}\} \quad (2.1)$$

é uma base de uma topologia em X .

(b) Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma base de uma topologia em X , então

$$\langle \mathcal{B} \rangle := \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B} \text{ para todo } i \in I \right\} \quad (2.2)$$

é uma topologia em X .

(c) Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma base de uma topologia em X , então

$$\{A \subseteq X \mid \text{para todo } x \in A \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq A\} = \langle \mathcal{B} \rangle.$$

Demonstração. Esta demonstração é técnica, mas ilustra o papel de cada condição nas definições de subbase e base.

(a) Vamos começar mostrando que $[\mathcal{S}]$ é uma subbase de topologia em X . Observe que $\mathcal{S} \subseteq [\mathcal{S}]$, pois podemos tomar $n = 1$ em (2.1). Como $\mathcal{S}$ é uma subbase de uma topologia em X , então $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$; e como $\mathcal{S} \subseteq [\mathcal{S}]$, então $\bigcup_{B \in [\mathcal{S}]} B = X$.

Agora, vamos mostrar que $[\mathcal{S}]$ é uma base de topologia em X . Se $B_1, B_2 \in [\mathcal{S}]$, então existem $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tais que $B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_n$ e $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{S}$ tais que $B_2 = T_1 \cap \cdots \cap T_m$. Logo

$$B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \cdots \cap S_n \cap T_1 \cap \cdots \cap T_m \in [\mathcal{S}].$$

Em particular, para todo $x \in B_1 \cap B_2$, podemos tomar $B_3 = B_1 \cap B_2 \in [\mathcal{S}]$, e teremos $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Isso mostra que $[\mathcal{S}]$ é, de fato, uma base de topologia em X .

(b) Vamos mostrar que $\langle \mathcal{B} \rangle$ satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.1.

- (i) Tomando $I = \emptyset$ em (2.2), obtemos que $\emptyset \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Além disso, como $\mathcal{B}$ é uma base (e, portanto, também uma subbase) de uma topologia em X , temos $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$, de modo que $X \in \langle \mathcal{B} \rangle$.
- (ii) Segue diretamente da definição (2.2) de $\langle \mathcal{B} \rangle$: uma união arbitrária de uniões de elementos de $\mathcal{B}$ é novamente uma união de elementos de $\mathcal{B}$.
- (iii) Sejam $n > 0$ e $A_1, \dots, A_n \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Pela definição (2.2), existem conjuntos de índices $I_1, \dots, I_n$ e subfamílias $\{B_{i,1}\}_{i \in I_1}, \dots, \{B_{i,n}\}_{i \in I_n} \subseteq \mathcal{B}$ tais que $A_k = \bigcup_{i \in I_k} B_{i,k}$ para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pela distributividade da união sobre a interseção, temos que

$$A_1 \cap \dots \cap A_n = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in I_1 \times \dots \times I_n} (B_{i_1,1} \cap \dots \cap B_{i_n,n}).$$

Assim, para concluir essa demonstração, é suficiente mostrar que cada $B_{i_1,1} \cap \dots \cap B_{i_n,n} \in \langle \mathcal{B} \rangle$, pois uma união arbitrária de elementos de $\langle \mathcal{B} \rangle$ também pertence a $\langle \mathcal{B} \rangle$.

Para isso, fixe $(i_1, \dots, i_n) \in I_1 \times \dots \times I_n$. Pela Definição 2.5, para todo $x \in B_{i_1,1} \cap \dots \cap B_{i_n,n}$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq B_{i_1,1} \cap \dots \cap B_{i_n,n}$. Logo

$$B_{i_1,1} \cap \dots \cap B_{i_n,n} \subseteq \bigcup_{x \in B_{i_1,1} \cap \dots \cap B_{i_n,n}} B_x \subseteq B_{i_1,1} \cap \dots \cap B_{i_n,n}.$$

Isso implica que $B_{i_1,1} \cap \dots \cap B_{i_n,n} = \bigcup_x B_x \in \langle \mathcal{B} \rangle$.

- (c) Para mostrar a inclusão $\subseteq$, seja A um subconjunto de X tal que, para todo $a \in A$, existe $B_a \in \mathcal{B}$ com $a \in B_a \subseteq A$. Então $A = \bigcup_{a \in A} B_a \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Agora, para mostrar a inclusão $\supseteq$, seja $A \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Pela definição de $\langle \mathcal{B} \rangle$, existe uma subfamília $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Isso significa que, para todo $x \in A$, existe $i \in I$ tal que $x \in B_i \subseteq A$. Isso conclui a demonstração. $\square$

O lema acima mostra que, a partir de qualquer base de topologia em um conjunto, obtemos uma topologia nesse conjunto. Nesse caso, dizemos que a base *gera* essa topologia.

Definição 2.7 (de topologia gerada). Dados um conjunto X e uma base $\mathcal{B}$ de uma topologia em X , a topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ é chamada de **topologia gerada por $\mathcal{B}$** . Neste caso, dizemos que $\mathcal{B}$ é **uma base da topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$** .

Observe que toda topologia é uma base de si mesma. Assim, toda topologia admite uma base que a gera. Os exemplos a seguir mostram que bases distintas (e, em particular, bases estritamente menores que a topologia) podem gerar topologias conhecidas, como a topologia trivial, a discreta e as topologias induzidas por métricas.

Exemplo 2.8. Considere um conjunto X . Observe que a família $\mathcal{S} = \{X\}$ é uma subbase de uma topologia em X . Nesse caso, $[\mathcal{S}] = \{X\}$ é uma base de uma topologia em X , e a topologia gerada por ela é $\langle [\mathcal{S}] \rangle = \{\emptyset, X\}$, a topologia trivial em X .

No exemplo anterior, a subbase é extremamente pequena e gera a topologia com o menor número possível de abertos, a topologia trivial. No extremo oposto, o exemplo a seguir mostra que a família formada pelos conjuntos com apenas um elemento é uma base que gera a topologia com o maior número possível de abertos, a topologia discreta.

Exemplo 2.9. Considere um conjunto X . Observe que a família $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ é uma base de uma topologia em X . De fato:

- $\bigcup_{x \in X} \{x\} = X$,
- $\{x\} \cap \{x\} = \{x\} \in \mathcal{B}$ para todo $x \in X$, e $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ para todos $x \neq y \in X$.

A topologia gerada por $\mathcal{B}$ é a topologia discreta em X , pois, para todo $A \subseteq X$, temos que $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \in \langle \mathcal{B} \rangle$.

Os dois exemplos anteriores são de natureza puramente combinatória. O exemplo a seguir é geometricamente mais rico: ele mostra que a família das bolas abertas de um espaço métrico é uma base para a topologia induzida pela métrica.

Exemplo 2.10. Seja (X, d) um espaço métrico. Considere a família de bolas abertas, $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in X \text{ e } r > 0\}$. Observe que essa família é uma base para uma topologia induzida pela métrica em X . De fato, sejam $x_1, x_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ e $x \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. Por construção, $d(x, x_1) < r_1$ e $d(x, x_2) < r_2$. Assim, $r := \min\{r_1 - d(x, x_1), r_2 - d(x, x_2)\} > 0$. Da desigualdade triangular (Definição 1.6(iii)), segue que $B(x, r) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$. Agora, comparando a Definição 1.10 com o Lema 2.6(c), concluímos que a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é exatamente a topologia $\{A \subseteq X \mid A \text{ é aberto em } (X, d)\}$, induzida pela métrica d .

O exemplo acima é importante pois conecta a teoria de bases ao contexto concreto dos espaços métricos. O exercício a seguir explora, em um exemplo pequeno e explícito, as noções de base e de fechados introduzidas nesta seção.

Exercício 2.2. Considere um conjunto com dois elementos, $X = \{x, y\}$ e a topologia $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ em X .

- (a) Encontre explicitamente todos os fechados de (X, τ) .
- (b) Encontre todas as bases da topologia τ .

Os exemplos e exercícios anteriores ilustram como bases distintas podem gerar a mesma topologia. A proposição a seguir fornece um critério prático para reconhecer quando uma família de abertos de uma topologia dada é, de fato, uma base dessa topologia.

Proposição 2.11. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{C} \subseteq \tau$ uma família de abertos. Se, para todo aberto $A \in \tau$ e todo $a \in A$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $a \in C \subseteq A$, então $\mathcal{C}$ é uma base de τ (isto é, $\mathcal{C}$ é uma base de uma topologia em X e $\langle \mathcal{C} \rangle = \tau$).

Demonstração. Vamos começar mostrando que $\mathcal{C}$ é uma subbase de uma topologia em X . Como $X \in \tau$, a hipótese garante que, para todo $x \in X$, existe $C_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_x \subseteq X$. Logo $\bigcup_{x \in X} C_x = X$, e $\mathcal{C}$ é uma subbase de uma topologia em X .

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{C}$ também é uma base de uma topologia em X . Dados $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, como $\mathcal{C} \subseteq \tau$, temos que $C_1 \cap C_2 \in \tau$ pela Definição 1.1. Por hipótese, para todo $x \in C_1 \cap C_2$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C \subseteq C_1 \cap C_2$. Isso mostra que $\mathcal{C}$ é uma base de uma topologia em X .

Para terminar, vamos mostrar que $\langle \mathcal{C} \rangle = \tau$. A inclusão $\langle \mathcal{C} \rangle \subseteq \tau$ segue do fato de que $\mathcal{C} \subseteq \tau$, da definição de $\langle \mathcal{C} \rangle$ (2.2) e da Definição 1.1. Para mostrar a inclusão $\tau \subseteq \langle \mathcal{C} \rangle$, fixe $A \in \tau$. Por hipótese, para cada $a \in A$, existe $C_a \in \mathcal{C}$ tal que $a \in C_a \subseteq A$. Logo $A = \bigcup_{a \in A} C_a \in \langle \mathcal{C} \rangle$. $\square$

A Proposição 2.11 é especialmente útil quando já temos uma topologia em mãos e queremos identificar uma base mais simples para ela. Os exercícios a seguir aplicam os resultados desta seção.

Exercício 2.3. Considere um conjunto X .

- (a) No caso em que X é finito, mostre que a topologia cofinita em X coincide com a topologia discreta.
- (b) No caso em que $X = \mathbb{R}$, descreva explicitamente os conjuntos abertos e fechados da topologia cofinita. Conclua que, nesse caso, a topologia cofinita coincide com a topologia de Zariski.

Resolução (Roger). (a) Lembre que a topologia cofinita em X é definida por

$$\tau_{\text{cof}} = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ é finito}\}$$

e que a topologia discreta em X é definida por $\tau_{\text{dis}} = \mathcal{P}(X)$. Para mostrar que $\tau_{\text{cof}} = \tau_{\text{dis}}$, vamos mostrar que $\tau_{\text{cof}} \subseteq \tau_{\text{dis}}$ e que $\tau_{\text{dis}} \subseteq \tau_{\text{cof}}$.

Como toda topologia em X é uma subfamília de $\mathcal{P}(X)$, temos que $\tau_{\text{cof}} \subseteq \tau_{\text{dis}}$. Para a inclusão oposta, observe que, se X é finito, então todo subconjunto A de X também é finito, e portanto $X \setminus A$ é finito. Logo, todo subconjunto de X satisfaz a condição que define os abertos de τ_{cof} . Isso mostra que $\tau_{\text{dis}} \subseteq \tau_{\text{cof}}$ e implica que $\tau_{\text{cof}} = \tau_{\text{dis}}$.

- (b) Queremos mostrar que a topologia cofinita e a topologia de Zariski coincidem em $\mathbb{R}$. Faremos isso mostrando que as duas topologias têm exatamente a mesma família de fechados, pois, pela Proposição 2.2 e pelo Exercício 2.1, uma topologia é determinada unicamente por seus fechados.

Lembre que os fechados da topologia cofinita em $\mathbb{R}$ são

$$\mathcal{F}_{\text{cof}} = \{\mathbb{R}\} \cup \{Z \subseteq \mathbb{R} \mid Z \text{ é finito}\}.$$

Lembre também que os fechados da topologia de Zariski em $\mathbb{R}$ são os conjuntos de zeros de famílias de polinômios em uma variável, $\mathcal{F}_{\text{Zar}} = \{V(S) \mid S \subseteq \mathbb{R}[x]\}$, onde

$$V(S) = \{a \in \mathbb{R} \mid f(a) = 0 \text{ para todo } f \in S\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{F}_{\text{cof}} = \mathcal{F}_{\text{Zar}}$.

Para mostrar que $\mathcal{F}_{\text{cof}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{Zar}}$, observe que $\mathbb{R} = V(\{0\})$ e que todo subconjunto finito $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de $\mathbb{R}$ é o conjunto de zeros do polinômio

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

Para mostrar que $\mathcal{F}_{\text{Zar}} \subseteq \mathcal{F}_{\text{cof}}$, observe que, no caso em que S contém o polinômio nulo $f = 0$, então toda constante satisfaz $f(a) = 0$, logo $V(S) = \mathbb{R}$ pertence a τ_{cof} . Já no caso em que S não contém o polinômio nulo, então cada $f \in S$ é um polinômio não nulo em uma variável, que possui apenas finitos zeros reais. Logo $V(S) \subseteq \bigcap_{f \in S} f^{-1}(0)$ é um conjunto finito e também pertence a τ_{cof} .

Isso mostra que a família de fechados da topologia cofinita na reta coincide com a família de fechados da topologia de Zariski. Como uma topologia pode ser unicamente determinada pela sua família de fechados, concluímos que a topologia cofinita é igual a topologia de Zariski em $\mathbb{R}$. $\square$

Exercício 2.4. Sejam X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma base de uma topologia em X . Mostre que $\langle \mathcal{B} \rangle$ é a interseção de todas as topologias em X que contêm $\mathcal{B}$. Conclua que, se $\mathcal{B}$ é uma topologia em X , então $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{B}$.

Resolução (Zyon). Denote por I o conjunto formado pelas topologias em τ que contêm $\mathcal{B}$. Para mostrar que $\mathcal{B} = \bigcap_{\tau \in I} \tau$, vamos mostrar que:

$$\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \bigcap_{\tau \in I} \tau \quad \text{e} \quad \bigcap_{\tau \in I} \tau \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle.$$

Para mostrar que $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \bigcap_{\tau \in I} \tau$, comece lembrando que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ para todo $\tau \in I$ e que

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \left\{ \bigcup_{j \in J} B_j \mid J \text{ é um conjunto e } B_j \in \mathcal{B} \text{ para todo } j \in J \right\}.$$

Depois, lembre que todo $\tau \in I$ é uma topologia que contém $\mathcal{B}$. Daí e da condição (ii) da Definição 1.1, obtemos que $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \tau$ para toda topologia $\tau \in I$. Como consequência, obtemos que $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \bigcap_{\tau \in I} \tau$.

Agora, para mostrar que $\bigcap_{\tau \in I} \tau \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$, lembre que $\langle \mathcal{B} \rangle$ é uma topologia que contém $\mathcal{B}$. Assim, $\bigcap_{\tau \in I} \tau = \langle \mathcal{B} \rangle \cap (\bigcap_{\tau \in I} \tau)$. Isso implica que $\bigcap_{\tau \in I} \tau \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$ e conclui a demonstração de que $\langle \mathcal{B} \rangle = \bigcap_{\tau \in I} \tau$.

Para justificar a segunda afirmação, suponha que $\mathcal{B}$ é uma topologia em X . Como $\mathcal{B}$ é uma topologia que contém $\mathcal{B}$, então $\langle \mathcal{B} \rangle = \bigcap_{\tau \in I} \tau = \mathcal{B} \cap (\bigcap_{\tau \in I} \tau) \subseteq \mathcal{B}$. Por outro lado, da definição de $\langle \mathcal{B} \rangle$, fica claro que $\mathcal{B} \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$. Com isso, concluímos que se $\mathcal{B}$ é uma topologia em X , então $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B} \rangle$ é a menor topologia que contém $\mathcal{B}$. $\square$

AULA 3

Nesta aula, construiremos diversos exemplos de espaços topológicos e os comparamos. O principal objetivo é acumular uma gama suficientemente ampla de exemplos que nos ajude a desenvolver intuição sobre os conceitos que aparecerão na sequência desta disciplina.

3.1. Comparações entre topologias. Dado um conjunto X , pode existir mais de uma topologia em X , como vimos nos exemplos da Aula 1. Nesta seção, uma maneira precisa de comparar topologias em um mesmo conjunto, por meio da relação de inclusão entre as respectivas famílias de abertos. Em seguida, ilustraremos essa comparação em casos simples e enunciaremos um resultado que nos ajudará a comparar topologias em casos mais gerais.

Definição 3.1 (de topologia mais fina e mais grossa). Dados um conjunto X e duas topologias τ, τ' em X , dizemos que τ é **mais grossa** que τ' quando $\tau \subseteq \tau'$, e analogamente, dizemos que τ é **mais fina** que τ' quando $\tau' \subseteq \tau$.

Lembre que, como topologias de um conjunto X são subfamílias de $\mathcal{P}(X)$, pode acontecer de duas topologias serem comparáveis (ou seja, $\tau \subseteq \tau'$ ou $\tau' \subseteq \tau$), mas também pode acontecer de não serem comparáveis (ou seja, $\tau' \not\subseteq \tau$ e $\tau \not\subseteq \tau'$).

A seguir, construiremos exemplos de topologias em diversos conjuntos e as comparamos. Para começar, consideremos os dois casos mais simples: conjuntos que admitem uma única topologia.

Exemplo 3.2. Lembre que a única topologia possível no conjunto vazio é $\tau = \{\emptyset\}$ (ver Exemplo 1.2). Lembre também que, se um conjunto X tem apenas um elemento, então também existe uma única topologia nele, $\tau = \{\emptyset, X\}$ (ver Exemplo 1.3). Nesses casos, a única topologia no conjunto é ao mesmo tempo mais grossa e mais fina que ela mesma.

O próximo caso de interesse é o de conjuntos com exatamente dois elementos, pois é o menor em que aparecem múltiplas topologias e a comparação entre elas se torna não trivial.

Exemplo 3.3. Considere um conjunto com dois pontos distintos, $X = \{a, b\}$. Vamos listar todas as topologias em X :

- Topologia trivial: $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$.
- Topologia de Sierpinski: $\tau_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.
- Outra topologia de Sierpinski: $\tau_b = \{\emptyset, \{b\}, X\}$.
- Topologia discreta: $\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$.

Observe que $\tau_0 \subsetneq \tau_a \subsetneq \tau_1$ e que $\tau_0 \subsetneq \tau_b \subsetneq \tau_1$, mas que τ_a e τ_b não são comparáveis.

Nos exemplos acima, a verificação da relação de inclusão entre topologias é direta, pois as topologias são finitas e explícitas. Em geral, o critério do lema a seguir

tornará essa comparação mais eficiente: em vez de comparar todos os abertos, basta verificar uma condição apenas sobre abertos básicos.

Lema 3.4. Sejam X um conjunto e $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ duas bases de topologias em X . A topologia $\langle \mathcal{B}' \rangle$ é mais fina que a topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}$ e todo $b \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $b \in B' \subseteq B$.

Demonstração. Vamos começar mostrando a parte “somente se”. Para isso, suponha que $\langle \mathcal{B}' \rangle$ seja mais fina que $\langle \mathcal{B} \rangle$, ou seja, que $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle$. Queremos mostrar que: para todo $B \in \mathcal{B}$ e todo $b \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $b \in B' \subseteq B$. Pela definição de $\langle \mathcal{B} \rangle$ (2.2), temos que $B \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$. Além disso, como $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle$ por hipótese, todo $B \in \mathcal{B}$ é aberto em relação à topologia $\langle \mathcal{B}' \rangle$. Assim, pelo Lema 2.6(c), para todo $b \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $b \in B' \subseteq B$.

Agora vamos mostrar a afirmação da parte “se”. Para isso, suponha que: para todo $B \in \mathcal{B}$ e todo $b \in B$, exista $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $b \in B' \subseteq B$. Queremos mostrar que $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle$. Pelo Lema 2.6(c), para todo $A \in \langle \mathcal{B} \rangle$ e todo $a \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subseteq A$. Daí e da hipótese, segue que existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $a \in B' \subseteq B \subseteq A$. Como isso vale para todo $a \in A$, o Lema 2.6(c) garante que $A \in \langle \mathcal{B}' \rangle$. $\square$

3.2. Exemplos de topologias na reta. Nesta seção, vamos considerar topologias na reta real. Comece lembrando das topologias em $\mathbb{R}$ que já conhecemos:

- Topologia trivial: $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.
- Topologia cofinita: $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid (\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \text{ ou } (\mathbb{R} \setminus A) \text{ é finito}\}$.
- Topologia usual: $\tau = \langle \mathcal{B} \rangle$, onde $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$.
- Topologia discreta: $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Observe que as topologias acima estão ordenadas da mais grossa para a mais fina. Vamos construir outras duas topologias em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.5. Considere $\mathcal{B}' = \{[a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$. Vamos verificar que $\mathcal{B}'$ é uma base de topologia em $\mathbb{R}$. Para mostrar que $\mathcal{B}'$ é uma subbase de topologia em $\mathbb{R}$, observe que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n) = \mathbb{R}$. Para mostrar que $\mathcal{B}'$ é, de fato, uma base de uma topologia em $\mathbb{R}$, observe que:

- $[a, b) \cap [c, d) = \emptyset$, se $b \leq c$ ou se $d \leq a$,
- $[a, b) \cap [c, d) \in \mathcal{B}'$, nos outros casos.

Agora, vamos usar o Lema 3.4 para mostrar que a topologia $\langle \mathcal{B}' \rangle$ é mais fina que a topologia usual de $\mathbb{R}$. Para isso, comece lembrando que $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$ é uma base para a topologia usual. Depois, observe que: para todos $a < b \in \mathbb{R}$ e $x \in (a, b)$, temos que $[x, b) \in \mathcal{B}'$ e $x \in [x, b) \subseteq (a, b)$. Assim, pelo Lema 3.4, a topologia $\langle \mathcal{B}' \rangle$ é mais fina que $\langle \mathcal{B} \rangle$.

Para terminar esse exemplo, observe que $[0, 1) \in \langle \mathcal{B}' \rangle$, mas $[0, 1)$ não é aberto na topologia usual de $\mathbb{R}$ (pois qualquer intervalo aberto contendo 0 contém pontos negativos, portanto não está contido em $[0, 1)$). Isso mostra que a topologia $\langle \mathcal{B}' \rangle$,

chamada de **topologia de Sorgenfrey**, é estritamente mais fina que a topologia usual da reta. A topologia de Sorgenfrey também é estritamente mais grossa que a topologia discreta, pois $\{0\} \notin \langle \mathcal{B}' \rangle$ (todo elemento não vazio de $\langle \mathcal{B}' \rangle$ contém um intervalo da forma $[a, b)$, que é infinito).

Vamos concluir esta seção com dois exercícios em que construímos novas topologias na reta. No primeiro, construiremos uma topologia que é estritamente mais grossa que a topologia usual e não comparável à topologia cofinita.

Exercício 3.1. Considere a família $\mathcal{B} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

- (a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de uma topologia em $\mathbb{R}$.
- (b) Mostre que a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é estritamente mais grossa que a topologia usual de $\mathbb{R}$.
- (c) Mostre que a topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ não é comparável à topologia cofinita.

Resolução (Celso). (a) Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em X , vamos começar mostrando que ela é uma subbase. Por um lado, como $(a, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, então $\bigcup_{a \in \mathbb{R}} (a, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}$, se tomarmos $a = x - 1$, temos que $x \in (a, \infty)$. Isso implica que $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{a \in \mathbb{R}} (a, \infty)$. Com isso, concluímos que $\bigcup_{a \in \mathbb{R}} (a, \infty) = \mathbb{R}$, ou seja, que $\mathcal{B}$ é uma subbase de topologia em $\mathbb{R}$.

Além disso, dados dois intervalos $B_1 = (a, \infty)$ e $B_2 = (b, \infty)$ em $\mathcal{B}$, temos que $B_1 \cap B_2 = (\max\{a, b\}, \infty) \in \mathcal{B}$ também. Assim, se tomarmos $B_3 = B_1 \cap B_2$, teremos que $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$ para todo $x \in B_1 \cap B_2$. Isso conclui a demonstração de que $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em $\mathbb{R}$.

- (b) Lembre que $\mathcal{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ é uma base para a topologia usual de $\mathbb{R}$. Vamos começar mostrando que: para todo $B \in \mathcal{B}$ e todo $b \in B$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $b \in C \subseteq B$. Para isso, considere $B = (a, \infty) \in \mathcal{B}$ e $x \in B$. Se tomarmos $\epsilon = \frac{1}{2}|x - a|$, teremos que o intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ está contido em (a, ∞) . Portanto, definindo $C = (x - \epsilon, x + \epsilon) \in \mathcal{C}$, temos que $x \in C \subseteq B$.

Pelo Lema 3.4, isso implica que a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é mais grossa que a topologia usual da reta. Por outro lado, dado $C = (a, b) \in \mathcal{C}$, não existe $B = (c, \infty) \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset C$. Portanto, pelo Lema 3.4, a topologia usual não é mais grossa que a topologia gerada por $\mathcal{B}$. Ou seja, a topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ é estritamente mais grossa que a topologia usual da reta.

- (c) Considere a base de topologia $\mathcal{B}$ e a topologia cofinita,

$$\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ é finito ou } A = \emptyset\},$$

como base para ela mesma. Vamos usar o Lema 3.4 para comparar as topologias geradas por essas bases.

Primeiro, vamos construir $A \in \tau$ e $a \in A$ para os quais não existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subseteq A$. Considere $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $a = -1$. Se $B \in \mathcal{B}$, então $B = (c, \infty)$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Além disso, se $a \in B$, então $c < -1$: e se $B \subseteq A$, então $c > 0$. Como não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < -1$ e $c > 0$, então tal conjunto B não

existe. Assim, pelo Lema 3.4, a topologia gerada por $\mathcal{B}$ não é mais fina que a topologia cofinita em $\mathbb{R}$.

Agora, vamos construir $B \in \mathcal{B}$ e $b \in B$ para os quais não existe $A \in \tau$ tal que $b \in A \subseteq B$. Considere $B = (0, \infty)$ e $b = 1$. Se $A \in \tau$ for tal que $A \subseteq B$, então $A = \emptyset$. Caso contrário, o complementar de A seria finito e não conteria $\mathbb{R} \setminus B = (-\infty, 0]$. No entanto, se $A = \emptyset$, então $b \notin A$. Isso mostra que não existe $A \in \tau$ tal que $b \in A \subseteq B$. Assim, pelo Lema 3.4, a topologia cofinita não é mais fina que a topologia gerada por $\mathcal{B}$ em $\mathbb{R}$. Com isso, concluímos que essas duas topologias não são comparáveis. $\square$

No próximo exercício, construiremos uma topologia que é estritamente mais fina que a topologia usual, estritamente mais grossa que a topologia discreta, e não é comparável à topologia de Sorgenfrey.

Exercício 3.2. Considere

$$K := \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}, \quad \mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(a, b) \setminus K \mid a < b \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Mostre que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é uma base para uma topologia em $\mathbb{R}$.
- (b) Mostre que a topologia $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$ é mais fina que a topologia usual de $\mathbb{R}$.
- (c) Mostre que a topologia $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$ não é comparável à topologia de Sorgenfrey.

Resolução (Daniel). (a) Primeiro, observe que $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia usual em $\mathbb{R}$. Em particular, $\mathcal{B}$ é uma subbase de topologia em $\mathbb{R}$. Isso implica que

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}} B.$$

Como $B \subseteq \mathbb{R}$ para todo $B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, concluímos que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é uma subbase de uma topologia em $\mathbb{R}$.

Agora, para terminar de mostrar que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é uma de topologia em $\mathbb{R}$, sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ e $x \in B_1 \cap B_2$. Nos casos em que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, porque $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em $\mathbb{R}$. No caso em que $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \in \mathcal{C}$, temos que $B_2 = B'_2 \setminus K$ para algum $B'_2 \in \mathcal{B}$. Daí e do fato que $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em $\mathbb{R}$, segue que existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B'_2$. Como $x \in B_2 = B'_2 \setminus K$ também, segue que

$$x \in (B_3 \setminus K) \subseteq B_1 \cap (B'_2 \setminus K) = B_1 \cap B_2.$$

No caso em que $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$, existem $B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}$ tais que $B_1 = B'_1 \setminus K$ e $B_2 = B'_2 \setminus K$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em $\mathbb{R}$ e $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq B'_1 \cap B'_2$, existe $B'_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B'_3 \subseteq B'_1 \cap B'_2$. Daí e do fato que $x \in B_1 \cap B_2$ (ou seja, $x \notin K$), segue que $x \in B'_3 \setminus K \subseteq (B'_1 \cap B'_2) \setminus K = B_1 \cap B_2$. Como $B'_3 \in \mathcal{B}$, então $B_3 := (B'_3 \setminus K) \in \mathcal{C}$.

(b) Da definição de topologia gerada (2.2) e do fato que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B} \rangle &= \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid I \text{ é um conjunto e } B_i \in \mathcal{B} \text{ para todo } i \in I \right\} \\ &\subseteq \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid I \text{ é um conjunto e } B_i \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \text{ para todo } i \in I \right\} \\ &= \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle \mathcal{B} \rangle$ é a topologia usual de $\mathbb{R}$, isso mostra que a topologia gerada por $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é mais fina que ela.

(c) Para mostrar que a topologia gerada por $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ não é comparável à topologia de Sorgenfrey, vamos construir um aberto em $\mathbb{R}$ em relação à topologia de Sorgenfrey que não é aberto em relação à topologia gerada por $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Depois, vamos construir um aberto de $\mathbb{R}$ em relação à topologia gerada por $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ que não é aberto em relação à topologia de Sorgenfrey.

Primeiro, considere o conjunto $A = [0, 1)$, que é aberto em relação à topologia de Sorgenfrey (ver Exemplo 3.5). Para mostrar que A não é aberto em relação à topologia gerada por $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, vamos mostrar que não existe $B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ que contém 0 e está contido em A . De fato, todo elemento $B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é da forma $B = (a, b)$ ou $B = (a, b) \setminus K$. Assim, para que $0 \in B$, temos com $a < 0 < b$. Dessa forma, sempre existirá $x \in B$ com $x < 0$. Portanto $A \not\subseteq [0, 1)$. Isso implica que A não é aberto em relação à topologia gerada por $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

Agora, considere $A' = (-1, 1) \setminus K \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Para mostrar que A' não é aberto em relação à topologia de Sorgenfrey, vamos mostrar que não existe $B' \in \{[a, b) \mid a < b\}$ tal que $0 \in B' \subseteq A'$. De fato, para que $0 \in [a, b)$, temos que $a \leq 0 < b$. Assim, existirá $x \in [a, b)$ que é positivo. Consequentemente, se tomarmos $n := \lceil \frac{1}{x} \rceil + 1$, teremos que $0 < \frac{1}{n} < x < b$. Como $\frac{1}{n} \notin B'$ e $\frac{1}{n} \notin A'$, concluímos que $B' \not\subseteq A'$. Como $\mathcal{B}' = \{[a, b) \mid a < b\}$ é uma base para a topologia de Sorgenfrey (ver Exemplo 3.5), então A' não é aberto em relação a essa topologia.

Conclui-se, portanto, que $\tau \not\subseteq \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$ e que $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle \not\subseteq \tau$, ou seja, que essas duas topologias não são comparáveis. $\square$

3.3. Exemplos de topologias no plano. Nesta seção, vamos considerar topologias no plano cartesiano. Comece lembre das topologias em $\mathbb{R}^2$ que já conhecemos:

- Topologia trivial: $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$.
- Topologias métricas: $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid A \text{ é aberto em relação à } d\}$, onde d é uma métrica em $\mathbb{R}^2$ (ver Definição 1.10).
- Topologia discreta: $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

Como a topologia trivial é a mais grossa e a topologia discreta é a mais fina em qualquer conjunto, as topologias acima estão ordenadas da mais grossa para a mais fina, qualquer que seja a métrica escolhida. Em particular, no caso em que d é a

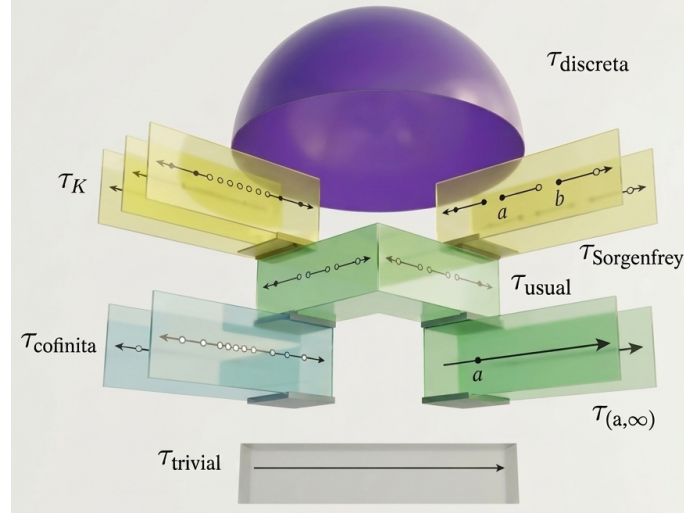


FIGURA 3.1. Comparação entre topologias na reta:

$$\tau_{\text{trivial}} \subsetneq \tau_{\text{cofinita}} \subsetneq \tau_{\text{usual}} \subsetneq \tau_K \subsetneq \tau_{\text{Sorgenfrey}} \subsetneq \tau_{\text{discreta}}$$

métrica discreta (ver Exemplo 1.9), a topologia obtida é a topologia discreta (ver Exercício 1.4). Vamos construir outras topologias em $\mathbb{R}^2$ e compará-las.

Exemplo 3.6. Lembre do Exemplo 2.4 que a topologia de Zariski em $\mathbb{R}^2$ é a topologia cujos fechados são os conjuntos de zeros de famílias de polinômios em duas variáveis, isto é, os subconjuntos fechados são da forma

$$V(S) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a, b) = 0 \text{ para todo } f \in S\}, \quad \text{onde } S \subseteq \mathbb{R}[x, y].$$

Vamos mostrar que a topologia de Zariski em $\mathbb{R}^2$ é mais grossa que a topologia usual, ou seja, que todo aberto de Zariski é aberto na topologia usual (induzida pela métrica euclidiana d_2).

Seja $S \subseteq \mathbb{R}[x, y]$ e considere o fechado de Zariski $V(S)$. Para mostrar que $\mathbb{R}^2 \setminus V(S)$ é aberto na topologia usual, fixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus V(S)$. Por definição, existe $f \in S$ tal que $f(a, b) \neq 0$. Como f é um polinômio, então a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Isso implica que existe uma bola aberta em torno de (a, b) formada por pontos (x, y) tais que $f(x, y) \neq 0$ também. Ou seja, existe $r > 0$ tal que $B((a, b), r)$ está contido em $\mathbb{R}^2 \setminus V(S)$. Pela Definição 1.10, isso significa exatamente que $\mathbb{R}^2 \setminus V(S)$ é aberto na topologia induzida pela métrica d_2 .

Para ver que a topologia de Zariski é estritamente mais grossa que a topologia usual em $\mathbb{R}^2$, observe que o semi-plano $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}$ é aberto na topologia usual, mas não é aberto na topologia de Zariski.

O exemplo anterior ilustra como a topologia de Zariski e a topologia usual diferem em $\mathbb{R}^2$. O exemplo a seguir mostra que duas métricas distintas podem induzir a mesma topologia em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.7. Lembre do Exercício 1.3 que a função

$$d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad d_\infty((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^2$. Assim, d_∞ induz uma topologia em $\mathbb{R}^2$. Pelo Exemplo 2.10, a família de bolas abertas relativas à métrica d_∞ forma uma base para essa topologia. Observe que essas bolas abertas são, na verdade, quadrados abertos:

$$\begin{aligned} B((a_1, a_2), r) &= \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} < r\} \\ &= \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |a_1 - b_1| < r \text{ e } |a_2 - b_2| < r\} \\ &= (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a topologia induzida pela métrica d_∞ coincide com a topologia induzida pela métrica euclidiana d_2 . Para isso, usaremos as desigualdades

$$d_\infty(a, b) \leq d_2(a, b) \leq \sqrt{2} d_\infty(a, b), \quad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}^2.$$

Para justificar a primeira desigualdade, comece observando que, para $i \in \{1, 2\}$,

$$|a_i - b_i| = \sqrt{(a_i - b_i)^2} \leq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = d_2(a, b).$$

Daí segue que $d_\infty(a, b) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \leq d_2(a, b)$. Para justificar a segunda desigualdade, basta observar que

$$d_2(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \leq \sqrt{d_\infty(a, b)^2 + d_\infty(a, b)^2} = \sqrt{2} d_\infty(a, b).$$

Agora, vamos usar essas desigualdades e o Lema 3.4 para mostrar que as topologias induzidas por d_2 e por d_∞ coincidem. Denote por $\mathcal{B}$ a base formada pelas bolas abertas em relação a d_2 e por $\mathcal{B}'$ a base formada pelas bolas abertas em relação a d_∞ .

Para mostrar que $\langle \mathcal{B}' \rangle$ é mais fina que $\langle \mathcal{B} \rangle$, fixe $B \in \mathcal{B}$ e $b \in B$. Queremos construir $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $b \in B' \subseteq B$. Para isso, sejam $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ tais que $B = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(x, y) < r\}$. Como $b \in B$, então $d_2(x, b) < r$. Assim, podemos definir $r' := \frac{1}{\sqrt{2}}(r - d_2(x, b)) > 0$. Agora vamos mostrar que a bola aberta $B' = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty(b, y) < r'\}$ está contida em B . De fato, se $y \in B'$, então:

$$d_2(x, y) \leq d_2(x, b) + d_2(b, y) \leq d_2(x, b) + \sqrt{2} d_\infty(b, y) < d_2(x, b) + (r - d_2(x, b)) = r.$$

Isso implica que $y \in B$, e portanto, que $B' \subseteq B$. Como $b \in B' \subseteq B$ e $B' \in \mathcal{B}'$, segue do Lema 3.4 que $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle$.

Agora, para mostrar que $\langle \mathcal{B} \rangle$ é mais fina que $\langle \mathcal{B}' \rangle$, fixe $B' \in \mathcal{B}'$ e $b' \in B'$. Queremos construir $B \in \mathcal{B}$ tal que $b' \in B \subseteq B'$. Para isso, sejam $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ tais que $B' = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_\infty(x, y) < r\}$. Como $b' \in B'$, podemos definir $r' = r - d_\infty(x, b') > 0$. Agora vamos mostrar que a bola aberta $B := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(b', y) < r'\}$ está contida em B' . De fato, se $y \in B$, então:

$$d_\infty(x, y) \leq d_\infty(x, b') + d_\infty(b', y) \leq d_\infty(x, b') + d_2(b', y) < d_\infty(x, b') + r' = r.$$

Isso implica que $y \in B'$, e portanto, que $B \subseteq B'$. Como $b' \in B \subseteq B'$ e $B \in \mathcal{B}$, segue do Lema 3.4 que $\langle \mathcal{B}' \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$.

Isso mostra que, apesar das métricas d_2 e d_∞ serem diferentes, as topologias induzidas por d_2 e por d_∞ são iguais.

O exemplo acima mostra que, em $\mathbb{R}^2$, as topologias métricas geradas pelas bolas redondas (relativas a d_2) e pelas bolas quadradas (relativas a d_∞) são as mesmas. O exercício abaixo generaliza esse resultado para outras métricas.

Exercício 3.3. Considere um número inteiro positivo p e defina

$$d_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{como sendo} \quad d_p((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \sqrt[p]{|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p}.$$

- (a) Mostre que d_p é uma métrica em $\mathbb{R}^2$ para todo p . (Sugestão: para provar a desigualdade triangular, use a [Desigualdade de Minkowski](#) sem demonstrá-la.)
- (b) Mostre que, para quaisquer dois números inteiros positivos, p e q , existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $d_p(a, b) \leq c d_q(a, b)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}^2$.
- (c) Conclua que as topologias induzidas pelas métricas d_p são todas iguais.

Resolução (Israel). (a) Dado um número inteiro positivo p , mostraremos que d_p satisfaz as quatro condições de métrica.

- (i) Para todos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, temos que $|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p \geq 0$, pois a potência p -ésima de um número não negativo é não negativa e a soma de números não negativos é não negativa. Como a raiz p -ésima de um número não negativo também é não negativa, segue que

$$d_p((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \sqrt[p]{|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p} \geq 0.$$

Além disso, observe que:

$$\begin{aligned} d_p((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = 0 &\iff \sqrt[p]{|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p} = 0 \\ &\iff |a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p = 0 \\ &\iff |a_1 - b_1|^p = 0 \text{ e } |a_2 - b_2|^p = 0 \\ &\iff a_1 = b_1 \text{ e } a_2 = b_2. \end{aligned}$$

- (ii) Como $|a_i - b_i| = |b_i - a_i|$ para todos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ e $i = \{1, 2\}$, então

$$\begin{aligned} d_p((a_1, a_2), (b_1, b_2)) &= \sqrt[p]{|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p} \\ &= \sqrt[p]{|b_1 - a_1|^p + |b_2 - a_2|^p} \\ &= d_p((b_1, b_2), (a_1, a_2)). \end{aligned}$$

- (iii) Para mostrar que d_p também satisfaz a desigualdade triangular, sejam $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ e $c = (c_1, c_2)$ elementos em $\mathbb{R}^2$. Depois, defina

$$u_1 = a_1 - b_1, \quad u_2 = a_2 - b_2, \quad v_1 = b_1 - c_1 \quad \text{e} \quad v_2 = b_2 - c_2.$$

Em seguida, observe que

$$u_1 + v_1 = a_1 - c_1 \quad \text{e} \quad u_2 + v_2 = a_2 - c_2.$$

Pela desigualdade de Minkowski, temos que

$$\sqrt[p]{|u_1 + v_1|^p + |u_2 + v_2|^p} \leq \sqrt[p]{|u_1|^p + |u_2|^p} + \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p}.$$

Substituindo as expressões acima nessa desigualdade, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 d_p(a, c) &= \sqrt[p]{|a_1 - c_1|^p + |a_2 - c_2|^p} \\
 &= \sqrt[p]{|u_1 + v_1|^p + |u_2 + v_2|^p} \\
 &\leq \sqrt[p]{|u_1|^p + |u_2|^p} + \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p} \\
 &= \sqrt[p]{|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p} + \sqrt[p]{|b_1 - c_1|^p + |b_2 - c_2|^p} \\
 &\leq d_p(a, b) + d_p(b, c).
 \end{aligned}$$

Como as condições (i)-(iii) da Definição 1.6 são satisfeitas, concluímos que d_p é uma métrica em $\mathbb{R}^2$ para todo inteiro positivo p .

- (b) Seja p um inteiro positivo. Para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos a norma $\|v\|_p$ por $\sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p}$. Observe que $d_p(a, b) = \|a - b\|_p$ para todo $a, b \in \mathbb{R}^2$. Assim, dados dois inteiros positivos p e q , mostrar que “existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $d_p(a, b) \leq c d_q(a, b)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}^2$ ” é equivalente a mostrar que “existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\|v\|_p \leq c \|v\|_q$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.” Assim, vamos mostrar essa última afirmação.

Para começar, note que, para todo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$|v_1| = \sqrt[p]{|v_1|^p} \leq \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p} = \|v\|_p$$

e

$$|v_2| = \sqrt[p]{|v_2|^p} \leq \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p} = \|v\|_p.$$

Assim, se denotarmos $\max\{|v_1|, |v_2|\}$ por $\|v\|_\infty$, obtemos que

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|\} \leq \|v\|_p.$$

Além disso, observe que

$$\|v\|_p = \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p} \leq \sqrt[p]{\|v\|_\infty^p + \|v\|_\infty^p} = \sqrt[p]{2\|v\|_\infty^p} = \sqrt[p]{2} \|v\|_\infty.$$

Combinando as desigualdades obtidas acima, concluímos que

$$\|v\|_p \leq \sqrt[p]{2} \|v\|_\infty \leq \sqrt[p]{2} \|v\|_q \quad \text{para todos } p, q > 0.$$

Isso implica que $c = \sqrt[p]{2} \in \mathbb{R}_{>0}$ é tal que $d_p(a, b) \leq c d_q(a, b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}^2$.

- (c) Sejam p, q dois inteiros não negativos. Denote por $\mathcal{B}_p$ a base da topologia induzida pela métrica d_p formada por todas as bolas abertas relativas à métrica d_p e por $\mathcal{B}_q$ a base da topologia induzida pela métrica d_q formada por todas as bolas abertas relativas à métrica d_q . Vamos começar mostrando que, para toda bola aberta $B_{d_p}(x, r) \in \mathcal{B}_p$ e todo $y \in B_{d_p}(x, r)$, existe uma bola aberta $B_{d_q}(y, r')$ tal que $B_{d_q}(y, r') \subseteq B_{d_p}(x, r)$.

De fato, vamos tomar $r' = \frac{1}{\sqrt[p]{2}}(r - d_p(x, y))$. Pelo item (b) e pela desigualdade triangular, se $z \in B_{d_q}(y, r')$, então:

$$\begin{aligned} d_p(x, z) &\leq d_p(x, y) + d_p(y, z) \\ &\leq d_p(x, y) + \sqrt[p]{2} d_q(y, z) \\ &< d_p(x, y) + \sqrt[p]{2} r' \\ &= d_p(x, y) + (r - d_p(x, y)) \\ &= r. \end{aligned}$$

Isso mostra que $B_{d_q}(y, r')$ está contida em $B_{d_p}(x, r)$.

Pelo Lema 3.4, isso implica que a topologia induzida pela métrica d_q é mais fina que a topologia induzida pela métrica d_p em $\mathbb{R}^2$. Como o argumento do parágrafo acima é simétrico em p e q , podemos trocar p por q e usar o Lema 3.4 para concluir que a topologia induzida pela métrica d_p é mais fina que a topologia induzida pela métrica d_q . Isso mostra que as topologia induzidas por todas as métricas d_p são as mesmas. $\square$

Vamos concluir esta aula com um exercício em que construímos uma topologia em um conjunto totalmente ordenado. Em particular, se fixarmos a ordem lexicográfica entre os elementos de $\mathbb{R}^2$, nós obtemos uma nova topologia em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 3.4. Dado um conjunto X , uma **ordem total** em X é uma relação $R \subseteq X \times X$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) xRx para todo $x \in X$ (reflexividade);
- (ii) se xRy e yRx , então $x = y$ (antissimetria);
- (iii) se xRy e yRz , então xRz (transitividade);
- (iv) para todos $x, y \in X$, temos que xRy ou yRx (totalidade).

Dado um conjunto X munido de uma ordem total $\leq$, defina a relação $<$ por: $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$. Usando essa relação, defina os intervalos

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in X \mid a < x < b\}, \\ [a, b) &:= \{x \in X \mid a \leq x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in X \mid a < x \leq b\}, \end{aligned}$$

e defina a família $\mathcal{B}$ como sendo a coleção dos seguintes subconjuntos de X :

- (a, b) para todo $a < b \in X$;
- $[x_0, b)$ para todo $b \in X$, se X admitir um elemento minimal x_0 ;
- $(a, x_\infty]$ para todo $a \in X$, se X admitir um elemento maximal x_∞ .

- (a) Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em X .
- (b) Mostre que, em $X = \mathbb{R}^2$, a relação $\preceq$ definida por $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$ quando $a_1 < b_1$, ou quando $a_1 = b_1$ e $a_2 \leq b_2$, é uma ordem total em $\mathbb{R}^2$. Essa ordem é chamada de **ordem lexicográfica** (ou **ordem do dicionário**).

- (c) Mostre que a topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ gerada pela base do item (a) usando a ordem do item (b) é estritamente mais fina que a topologia usual de $\mathbb{R}^2$.

Resolução (Mateus). (a) Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em X , vamos começar mostrando que $\mathcal{B}$ é uma subbase. Comece observando que todo $B \in \mathcal{B}$ está contido em X (por construção). Assim, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$. Para mostrar a outra continência, vamos analisar três casos:

- Se x não for um elemento minimal nem maximal de X , então existem $a, b \in X$ tais que $a < x < b$. Logo, $x \in (a, b) \in \mathcal{B}$.
- Se x for um elemento minimal de X , como X tem pelo menos dois elementos, então existe $b \in X$ com $x < b$. Logo, $x \in [x, b)$.
- Se x for um elemento maximal de X , como X tem pelo menos dois elementos, então existe $a \in X$ com $a < x$. Logo $x \in (a, x]$.

Esses casos mostram que, para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$. Isso implica que $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, o que mostra que $\mathcal{B}$ é uma subbase de topologia em X .

Para completar a demonstração de que $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em X , sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$. Vamos construir um subconjunto $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Para isso, vamos analisar todos os casos possíveis:

- Se $B_1 = (a, b)$ e $B_2 = (c, d)$, a hipótese de que $x \in B_1 \cap B_2$ implica que $\max\{a, c\} < x < \min\{b, d\}$. Assim, definindo $B_3 := (\max\{a, c\}, \min\{b, d\})$, obtemos que $B_3 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$.
- Se $B_1 = (a, b)$ e $B_2 = [x_0, d)$, onde x_0 é o elemento minimal de X , a hipótese de que $x \in B_1 \cap B_2$ implica que $a = \max\{x_0, a\} < x < \min\{b, d\}$. Assim, definindo $B_3 := (a, \min\{b, d\})$, obtemos que $B_3 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$.
- Se $B_1 = (a, b)$ e $B_2 = (c, x_\infty]$, onde x_∞ é o elemento maximal de X , então a hipótese de que $x \in B_1 \cap B_2$ implica que $\max\{a, c\} < x < \min\{b, x_\infty\} = b$. Assim, definindo $B_3 := (\max\{a, c\}, b)$, temos: $B_3 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$.
- Se $B_1 = [x_0, b)$ e $B_2 = [x_0, d)$, como $x \in B_1 \cap B_2$, então $x_0 \leq x < \min\{b, d\}$. Assim, definindo $B_3 := [x_0, \min\{b, d\})$, temos: $B_3 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$.
- Se $B_1 = (a, x_\infty]$ e $B_2 = (c, x_\infty]$, como $x \in B_1 \cap B_2$, então $\max\{a, c\} < x$ e $x \leq x_\infty$. Assim, definindo $B_3 := (\max\{a, c\}, x_\infty]$, obtemos que $B_3 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$.
- Se $B_1 = [x_0, b)$ e $B_2 = (c, x_\infty]$, como $x \in B_1 \cap B_2$, então $c < x < b$. Assim, definindo $B_3 = (c, b)$, obtemos que $B_3 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_3 = B_1 \cap B_2$.

Como em todos os casos possíveis conseguimos encontrar um conjunto $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, concluímos que $\mathcal{B}$ é uma base de topologia em X .

- (b) Para mostrar que $\preceq$ é uma relação de ordem total em $\mathbb{R}^2$, vamos mostrar que $\preceq$ é reflexiva, antissimétrica, transitiva e que quaisquer dois elemento de $\mathbb{R}^2$ são comparáveis.

Para mostrar que $\preceq$ é reflexiva, basta observar que, para todo $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que $a_1 = a_1$ e $a_2 \leq a_2$. Daí e da definição da relação $\preceq$, obtemos que $(a_1, a_2) \preceq (a_1, a_2)$.

Para mostrar que $\preceq$ é antissimétrica, suponha que $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ são tais que $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$ e $(b_1, b_2) \preceq (a_1, a_2)$. Como a condição $a_1 < b_1$ contradiria a condição $b_1 \leq a_1$, e como a condição $b_1 < a_1$ contradiria a condição $a_1 \leq b_1$, concluímos que $a_1 = b_1$. Assim, pela definição de $\preceq$, temos que

$$a_2 \leq b_2 \text{ e } b_2 \leq a_2.$$

Pela antissimetria da ordem usual em $\mathbb{R}$, concluímos que $a_2 = b_2$ e, portanto, que $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

Para mostrar que $\preceq$ é transitiva, comece supondo que $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$ e $(b_1, b_2) \preceq (c_1, c_2)$. Agora, vamos separar a demonstração em dois casos:

- Suponha que $a_1 < b_1$. Como a desigualdade $(b_1, b_2) \preceq (c_1, c_2)$ implica $b_1 \leq c_1$, então $a_1 < b_1 \leq c_1$. Pela transitividade da ordem usual em $\mathbb{R}$, segue que $a_1 < c_1$. Isso implica que $(a_1, a_2) \preceq (c_1, c_2)$.
- Se $a_1 = b_1$ e $a_2 \leq b_2$, temos dois subcasos. Se $b_1 < c_1$, então $a_1 = b_1 < c_1$. Isso implica que $(a_1, a_2) \preceq (c_1, c_2)$. Caso contrário, se $b_1 = c_1$ e $b_2 \leq c_2$, então $a_1 = b_1 = c_1$ e $a_2 \leq b_2 \leq c_2$. Assim, pela transitividade da relação de ordem usual em $\mathbb{R}$, obtemos que $a_2 \leq c_2$. Isso também implica que $(a_1, a_2) \preceq (c_1, c_2)$.

Em ambos os casos, temos que $(a_1, a_2) \preceq (c_1, c_2)$. Isso mostra que a relação $\preceq$ é transitiva.

Os parágrafos acima mostram que $\preceq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{R}^2$. Para terminar de mostrar que $\preceq$ é uma ordem total, vamos mostrar que quaisquer dois elementos de $\mathbb{R}^2$ são comparáveis. Para isso, comece fixando dois elementos (a_1, a_2) e (b_1, b_2) em $\mathbb{R}^2$. Se $a_1 < b_1$, teremos que $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$. Se $a_1 = b_1$, temos dois casos: se $a_2 \leq b_2$, então $(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2)$; e se $b_2 \leq a_2$, então $(b_1, b_2) \preceq (a_1, a_2)$. Se $a_1 > b_1$, teremos que $(b_1, b_2) \preceq (a_1, a_2)$. Isso mostra que, em qualquer caso, dois elementos em $\mathbb{R}^2$ são sempre comparáveis em relação à $\preceq$.

- (c) Primeiro, vamos mostrar que a topologia usual, τ_{usual} , é mais grossa que a topologia induzida pela ordem lexicográfica, τ_{lex} , em $\mathbb{R}^2$. Para isso, vamos usar o Lema 3.4. Assim, comece lembrando que a topologia usual de $\mathbb{R}^2$ é gerada pelas bolas abertas. Depois, observe que, como em $\mathbb{R}^2$ não tem elemento máximo nem mínimo em relação à ordem $\preceq$, então a topologia induzida pela ordem lexicográfica é gerada por

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a = (a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) = b \in \mathbb{R}^2\}.$$

Agora, considere uma bola aberta $B(a, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ e um elemento $b \in B(a, r)$. Como $b \in B(a, r)$, então $d(a, b) < r$ e, consequentemente, $\epsilon := \frac{1}{2}(r - d(a, b)) > 0$. Assim, se denotarmos $b := (b_1, b_2)$ e definirmos $I := ((b_1, b_2 - \epsilon), (b_1, b_2 + \epsilon))$, teremos que $b \in I \subseteq B(a, r)$. De fato, como todo ponto de I tem distância a b menor que ϵ e $\epsilon < r$, segue que $I \subseteq B(a, r)$. Pelo Lema 3.4, concluímos que τ_{lex} é mais fina que τ_{usual} .

Agora vamos mostrar que τ_{usual} é *estritamente* mais grossa que τ_{lex} . Para isso, considere $I = ((0, 1), (0, -1)) \in \mathcal{B}$ e $b = (0, 0) \in I$. Vamos mostrar que não existe nenhuma bola aberta $B(x, r)$ tal que $b \in B(x, r) \subseteq I$. De fato, para que $B(x, r) \subseteq I$, temos que ter $x = (0, x_2)$ (para algum x_2 entre -1 e 1). No entanto, para todo $r > 0$, temos que $(\frac{r}{2}, x_2) \in B((0, x_2), r)$; e como $\frac{r}{2} \neq 0$, segue daí que $B((0, x_2), r) \not\subseteq I$. Pelo Lema 3.4, isso implica que τ_{lex} não é mais fina que τ_{usual} . Logo, a topologia induzida pela ordem lexicográfica é estritamente mais fina que a topologia usual em $\mathbb{R}^2$. $\square$

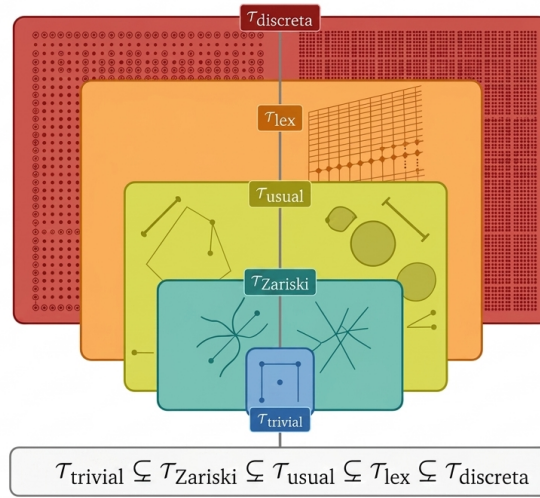


FIGURA 3.2. Comparação entre topologias no plano

AULA 4

Nas aulas anteriores, definimos espaços topológicos e estudamos diversas maneiras de construí-los: por meio de conjuntos abertos, fechados, por bases, e a partir de métricas. Nesta aula, introduziremos a noção de *vizinhança*, que oferece uma perspectiva local sobre a topologia de um espaço, e estudaremos os chamados *axiomas de enumerabilidade*, que medem, em certo sentido, a “complexidade” de uma topologia.

4.1. Sistemas de vizinhanças. Até agora, descrevemos topologias globalmente, por meio de famílias de abertos. Nesta seção, adotamos uma perspectiva local: dado um ponto x num espaço topológico X , estamos interessados nos subconjuntos de X que contêm x de forma aberta. Esses subconjuntos são chamados de *vizinhanças* de x e a coleção de todas elas forma o chamado *sistema de vizinhanças* de x .

Definição 4.1 (de sistema de vizinhanças). Dados um espaço topológico (X, τ) e um elemento $x \in X$, um subconjunto $U \subseteq X$ é dito uma *vizinhança* de x quando existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq U$. A família formada por todas as vizinhanças de x em X ,

$$\mathcal{U}_{x,X} := \{U \subseteq X \mid U \text{ é uma vizinhança de } x\},$$

é chamada de *sistema de vizinhanças* de x . (Quando o espaço topológico X for claro pelo contexto, denotaremos $\mathcal{U}_{x,X}$ simplesmente por $\mathcal{U}_x$.)

Observe que, em particular, todo aberto é uma vizinhança dos pontos contidos nele. A recíproca não é verdadeira em geral: uma vizinhança de um ponto não precisa ser aberta, precisa apenas conter um aberto que contenha esse ponto. Vejamos alguns exemplos concretos, começando com os casos mais simples.

Exemplo 4.2. Considere um conjunto X munido da topologia trivial, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Para todo $x \in X$, o único aberto que contém x é o próprio X . Portanto, X é a única vizinhança de todos os seus pontos: $\mathcal{U}_{x,X} = \{X\}$ para todo $x \in X$.

No extremo oposto à topologia trivial, a topologia discreta torna todo subconjunto um aberto, e portanto o sistema de vizinhanças de cada ponto é muito maior.

Exemplo 4.3. Considere um conjunto X munido da topologia discreta, $\tau = \mathcal{P}(X)$. Para todo $x \in X$, o conjunto $\{x\}$ é aberto e satisfaz $x \in \{x\}$. Portanto, todo subconjunto $U \subseteq X$ que contém x é uma vizinhança de x , porque satisfaz $\{x\} \subseteq U$ e $\{x\} \in \tau$. Isso implica que $\mathcal{U}_{x,X} = \{U \subseteq X \mid x \in U\}$.

Os dois exemplos acima são casos extremos, em que a topologia é, respectivamente, a mais grossa e a mais fina possível. O exemplo a seguir é mais sutil.

Exemplo 4.4. Considere o conjunto $X = \{a, b\}$ munido da topologia de Sierpinski $\tau_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Os sistemas de vizinhanças de a e de b são:

- $\mathcal{U}_a = \{\{a\}, X\}$, pois $\{a\} \in \tau$ e $\{a\} \subseteq X$.

- $\mathcal{U}_b = \{X\}$, pois o único aberto que contém b é X . Em particular, observe que $\{b\}$ não é uma vizinhança de b .

Os exemplos anteriores envolvem conjuntos com topologias muito simples. O exemplo a seguir descreve o sistema de vizinhanças de um ponto na reta real, que é o espaço topológico mais familiar do contexto da análise.

Exemplo 4.5. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual. Para todo $x \in \mathbb{R}$, um subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ é uma vizinhança de x se, e somente se, U contém algum intervalo aberto $(x-r, x+r)$ com $r > 0$. Em particular, o próprio $\mathbb{R}$, intervalos abertos (a, b) , intervalos fechados $[a, b]$, intervalos semiabertos $(a, b]$ e $[a, b)$ são todos vizinhanças de x , desde que $a < x < b$.

A descrição do sistema de vizinhanças feita no exemplo anterior para $\mathbb{R}$ generaliza naturalmente para o plano $\mathbb{R}^2$, substituindo intervalos abertos por bolas abertas.

Exemplo 4.6. Considere $\mathbb{R}^2$ munido da sua topologia usual. Para todo $x \in \mathbb{R}^2$, um subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma vizinhança de x se, e somente se, U contém alguma bola aberta $B(x, r)$ com $r > 0$. Em particular, o próprio $\mathbb{R}^2$, bolas abertas e bolas fechadas contendo x em seu interior são todos vizinhanças de x . Observe ainda que, como a topologia usual de $\mathbb{R}^2$ pode ser induzida por várias métricas distintas, $d_1, d_2, \dots, d_\infty$ (ver Exemplo 3.7 e Exercício 3.3), essas bolas abertas podem ser escolhidas relativas a qualquer uma dessas métricas.

Os exemplos acima ilustram que o sistema de vizinhanças de um ponto captura a estrutura local da topologia em torno desse ponto. O lema a seguir estabelece propriedades dos sistemas de vizinhanças que serão usados na próxima seção.

Lema 4.7. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $x \in X$.

- Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
- Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $Y \subseteq X$ é tal que $U \subseteq Y$, então $Y \in \mathcal{U}_x$.
- Um subconjunto $A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, $A \in \mathcal{U}_a$ para todo $a \in A$.

Demonstração. (a) Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então existem abertos A e B , tais que $x \in A \subseteq U$ e $x \in B \subseteq V$ (ver Definição 4.1). Como τ é uma topologia e $A, B \in \tau$, então $A \cap B \in \tau$. Além disso, como $x \in A$ e $x \in B$, então $x \in A \cap B \subseteq U \cap V$. Pela Definição 4.1, isso significa que $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.

(b) Se $U \in \mathcal{U}_x$, então existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq U$ (ver Definição 4.1). Assim, se $U \subseteq Y$, então $A \subseteq U \subseteq Y$, e portanto $x \in A \subseteq Y$ com $A \in \tau$. Pela Definição 4.1, isso significa que $Y \in \mathcal{U}_x$.

(c) “Somente se”: Se $A \subseteq X$ é aberto, então $A \in \tau$ e, para todo $a \in A$, temos que $a \in A \subseteq A$. Pela Definição 4.1, isso significa que $A \in \mathcal{U}_a$ para todo $a \in A$.

“Se”: Se $A \in \mathcal{U}_a$ para todo $a \in A$, então, pela Definição 4.1, para cada $a \in A$ existe $A_a \in \tau$ tal que $a \in A_a \subseteq A$. Portanto $A = \bigcup_{a \in A} A_a$. Como τ é fechada por uniões arbitrárias (condição (ii) da Definição 1.1) e cada $A_a \in \tau$, então $A \in \tau$, ou seja, A é aberto. $\square$

4.2. Base de vizinhanças. Em muitos espaços topológicos, o sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ de um ponto é muito grande, pois ele contém todos os conjuntos que contêm algum aberto que contém x . Na prática, frequentemente basta considerar uma subfamília menor que determina o comportamento local em x , no sentido de que qualquer vizinhança contém um elemento dessa subfamília. Essa ideia é formalizada na noção de *base de vizinhanças*.

Definição 4.8 (de base de vizinhanças). Dados um espaço topológico X e um elemento $x \in X$, uma **base de vizinhanças** de x é uma família $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x$ tal que: para todo $U \in \mathcal{U}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq U$.

Observe que, para qualquer espaço topológico X e qualquer $x \in X$, a família $\mathcal{U}_{x,X}$ é uma base de vizinhanças de x . Em particular, todo sistema de vizinhanças admite alguma base de vizinhanças. A base de vizinhanças mais natural e útil em cada contexto é, em geral, uma família muito menor que $\mathcal{U}_x$. Vejamos como esse conceito se manifesta nos espaços topológicos que já conhecemos.

Exemplo 4.9. Considere o espaço de Sierpinski, $X = \{a, b\}$, com $\tau_a = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ (ver Exercício 1.1). Lembre do Exemplo 4.4 que $\mathcal{U}_a = \{\{a\}, X\}$ e $\mathcal{U}_b = \{X\}$. Assim, temos que:

- $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$ é uma base de vizinhanças de a . De fato, $\{a\} \in \mathcal{U}_a$ e, para toda vizinhança $U \in \mathcal{U}_a$, temos que $\{a\} \subseteq U$. A única outra base de vizinhanças de a é $\mathcal{B}_a = \mathcal{U}_a$.
- $\mathcal{B}_b = \{X\}$ é a única base de vizinhanças de b . De fato, $X \in \mathcal{U}_b = \{X\}$ e é a única vizinhança aberta de b tal que $X \subseteq X$.

O espaço de Sierpinski, sendo finito, admite apenas bases de vizinhanças muito simples. Em espaços com mais estrutura, como a reta real, as bases de vizinhanças podem ser construídas de formas mais ricas, incluindo com conjuntos que não são abertos.

Exemplo 4.10. Considere $\mathbb{R}$ munido da sua topologia usual. Para todo $x \in \mathbb{R}$, a família

$$\mathcal{B}_x = \{(x - r, x + r) \mid r > 0\}$$

é uma base de vizinhanças de x . De fato, cada $(x - r, x + r)$ é um aberto contendo x , portanto pertence a $\mathcal{U}_x$; e se $U \in \mathcal{U}_x$, então por definição existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq U$.

Observe também que a família de intervalos fechados

$$\mathcal{B}'_x = \{[x - r, x + r] \mid r > 0\}$$

também é uma base de vizinhanças de x . De fato, para todo $r > 0$, o intervalo fechado $[x - r, x + r]$ é vizinhança de x pois contém o aberto $(x - r, x + r)$; e se $U \in \mathcal{U}_x$, então existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq U$, e consequentemente,

$$[x - r/2, x + r/2] \subseteq (x - r, x + r) \subseteq U.$$

A mesma ideia se aplica a $\mathbb{R}^2$: assim como em $\mathbb{R}$ podemos escolher bolas (intervalos) de diferentes formas como base de vizinhanças, em $\mathbb{R}^2$ podemos usar bolas relativas a métricas distintas e equivalentes.

Exemplo 4.11. Considere $\mathbb{R}^2$ munido da sua topologia usual. Para todo $x \in \mathbb{R}^2$, a família de bolas abertas com centro em x é uma base de vizinhanças de x e a família de bolas fechadas com centro em x é outra base de vizinhanças de x . Como a topologia de $\mathbb{R}^2$ pode ser induzida por várias métricas distintas, $d_1, d_2, \dots, d_\infty$ (ver Exemplo 3.7 e Exercício 3.3), essas bolas podem ser escolhidas relativas a qualquer uma dessas métricas.

Os exemplos acima mostram que bases de vizinhanças distintas podem descrever o mesmo sistema de vizinhanças. O lema a seguir caracteriza os abertos e fechados de um espaço topológico em termos de uma base de vizinhanças.

Lema 4.12. Sejam X um espaço topológico e, para cada elemento $x \in X$, seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x .

- (a) Para cada $x \in X$: se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
- (b) Um subconjunto $A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, para todo $a \in A$, existe $B \in \mathcal{B}_a$ tal que $B \subseteq A$.
- (c) Um subconjunto $Z \subseteq X$ é fechado se, e somente se, para todo $x \in X \setminus Z$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \cap Z = \emptyset$.

Demonstração. (a) Fixe $x \in X$. Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, então, em particular, $B_1, B_2 \in \mathcal{U}_x$ (ver Definição 4.8). Daí e do Lema 4.7(a) segue que $(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{U}_x$. Assim, como $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x , existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ (ver Definição 4.8).

- (b) “Somente se”: Se $A \subseteq X$ é aberto, então $A \in \mathcal{U}_a$ para todo $a \in A$. Como $\mathcal{B}_a$ é uma base de vizinhanças de a , então existe $B_a \in \mathcal{B}_a$ tal que $B_a \subseteq A$ para cada $a \in A$ (ver Definição 4.8).

“Se”: Suponha que, para todo $a \in A$, exista $B \in \mathcal{B}_a$ tal que $B \subseteq A$. Como $\mathcal{B}_a$ é uma base de vizinhanças de a , então $\mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{U}_a$ (ver Definição 4.8). Assim, para cada $a \in A$, existe $B \in \mathcal{U}_a$ tal que $B \subseteq A$. Agora, como B é uma vizinhança de a , então existe um aberto A_a tal que $a \in A_a \subseteq B$ (ver Definição 4.1). Como A_a é aberto e $a \in A_a \subseteq B \subseteq A$ para todo $a \in A$, então $A = \bigcup_{a \in A} A_a$ é aberto.

- (c) Lembre da Definição 1.1 que $Z \subseteq X$ é fechado se, e somente se, $X \setminus Z$ é aberto. Pelo item (b), isso é equivalente a: para todo $x \in X \setminus Z$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq X \setminus Z$. Isso significa que, para todo $x \in X \setminus Z$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \cap Z = \emptyset$. $\square$

O lema acima mostra como usar bases de vizinhanças para determinar se um conjunto é aberto ou fechado. A proposição a seguir complementa esse resultado, estabelecendo a relação entre bases de vizinhanças locais e bases globais da topologia: a reunião de bases de vizinhanças de todos os pontos forma uma base da topologia, e

reciprocamente, qualquer base da topologia fornece bases de vizinhanças para cada ponto.

Proposição 4.13. Seja (X, τ) um espaço topológico.

- (a) Se uma família $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma base da topologia τ , então, para todo $x \in X$, a família $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ é uma base de vizinhanças de x .
- (b) Se, para cada $x \in X$, uma família $\mathcal{B}_x \subseteq \tau$ é uma base de vizinhanças de x , então a família $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ é uma base da topologia τ .

Demonstração. (a) Fixe $x \in X$. Queremos mostrar que $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ é uma base de vizinhanças de x . Pela Definição 4.8, precisamos mostrar que, para todo $U \in \mathcal{U}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq U$. Para mostrar isso, lembre da Definição 4.1 que, se $U \in \mathcal{U}_x$, então existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq U$. Como $\mathcal{B}$ é uma base da topologia τ e A é um aberto contendo x , pela Proposição 2.11 existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$. Portanto, $B \in \mathcal{B}_x$ e $x \in B \subseteq U$.

- (b) Queremos mostrar que $\mathcal{B} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ é uma base da topologia τ . Pela Proposição 2.11, basta mostrar que: para todo $A \in \tau$ e todo $a \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subseteq A$. Como $a \in A$ e $A \in \tau$, temos que $A \in \mathcal{U}_a$. Assim, a existência de tal $B \in \mathcal{B}_a \subseteq \mathcal{B}$ com $B \subseteq A$ segue diretamente da Definição 4.8. $\square$

4.3. Axiomas de enumerabilidade. Os conceitos de base de vizinhanças e de base de topologia permitem formular perguntas sobre a “complexidade” local e global de um espaço topológico. Os chamados *axiomas de enumerabilidade* medem essa complexidade em termos da existência de bases de vizinhanças, ou de bases da topologia, que sejam enumeráveis.

Definição 4.14 (de espaço primeiro e segundo enumerável). Um espaço topológico (X, τ) é dito **primeiro enumerável** quando, para todo $x \in X$, existe uma base de vizinhanças enumerável de x ; e é dito **segundo enumerável** quando existe uma base enumerável da topologia τ .

Observe que todo espaço segundo enumerável é também primeiro enumerável: se $\mathcal{B}$ é uma base enumerável de τ , então, Proposição 4.13(a), para cada $x \in X$, a família $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ é uma base de vizinhanças enumerável de x . A recíproca dessa afirmação, no entanto, é falsa em geral, como mostrarão os exemplos abaixo. Começamos, no entanto, com casos mais simples.

Exemplo 4.15. Considere um conjunto X munido da topologia trivial, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Nesse caso, o espaço topológico (X, τ) é primeiro e segundo enumerável. De fato, para todo $x \in X$, temos que $\mathcal{U}_x = \{X\}$, pois X é o único aberto que contém x . Consequentemente, $\mathcal{B}_x = \{X\}$ é uma base de vizinhanças enumerável de x . Isso mostra que X é primeiro enumerável. Observe ainda que $\mathcal{B} = \{X\}$ é uma base enumerável da topologia τ . Portanto X também é segundo enumerável.

O exemplo da topologia trivial é o caso mais simples de todos. No extremo oposto, a topologia discreta mostra que o segundo axioma de enumerabilidade pode falhar, dependendo da cardinalidade do conjunto subjacente.

Exemplo 4.16. Considere um conjunto X munido da topologia discreta, $\tau = \mathcal{P}(X)$. Nesse caso, o espaço topológico (X, τ) é sempre primeiro enumerável. De fato, para todo $x \in X$, temos que $\mathcal{U}_x = \{Y \subseteq X \mid x \in Y\}$. Consequentemente, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ é uma base de vizinhanças de x , que é claramente enumerável (tem apenas um elemento). Além disso, se X for um conjunto enumerável, então $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ é uma base enumerável da topologia τ . Por outro lado, se X não for enumerável, então (X, τ) não é segundo enumerável. De fato, se $\mathcal{B}$ é uma base da topologia τ , então, para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \{x\}$, o que implica que $\{x\} \in \mathcal{B}$. Como X é não enumerável, então $\mathcal{B}$ também é não enumerável.

Os dois exemplos anteriores são de natureza combinatória. O exemplo a seguir é geometricamente mais significativo e mostra que os espaços métricos são sempre primeiro enumeráveis.

Exemplo 4.17. Se (X, d) for um espaço métrico, então X é primeiro enumerável. Para justificar essa afirmação, defina

$$\mathcal{B}_x := \{B(x, 1/n) \mid n \text{ é um número inteiro positivo}\} \quad \text{para cada } x \in X.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x . Para isso, observe que, se $Y \in \mathcal{U}_x$, então existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq Y$ (ver Definição 1.10). Como $r > 0$, o número inteiro $n := \lceil 1/r \rceil + 1$ é positivo e satisfaz $1/n < r$. Isso implica que $x \in B(x, 1/n) \subseteq B(x, r) \subseteq Y$, o que mostra que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x . Como $\mathcal{B}_x$ é um conjunto enumerável, nós concluímos que X é primeiro enumerável.

O exemplo anterior garante, em particular, que todo espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é primeiro enumerável. O exemplo a seguir mostra que $\mathbb{R}$ também é segundo enumerável, usando a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ para construir uma base enumerável para a sua topologia usual.

Exemplo 4.18. Considere a família de intervalos abertos na reta,

$$\mathcal{B} := \{(q - 1/n, q + 1/n) \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base da topologia usual de $\mathbb{R}$. Pela Proposição 2.11, basta mostrar que, para todo aberto A da topologia usual e todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Para mostrar isso, fixe um aberto $A \subseteq \mathbb{R}$ e um elemento $x \in A$. Como A é aberto na topologia usual, existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A$. Como $r > 0$, podemos definir $n := \lceil 2/r \rceil + 1$. Além disso, como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|x - q| < 1/n$. Então $x \in (q - 1/n, q + 1/n)$ e, para todo $y \in (q - 1/n, q + 1/n)$, temos que

$$|y - x| = |y - q + q - x| \leq |y - q| + |q - x| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < r.$$

Isso mostra que $x \in (q - 1/n, q + 1/n) \subseteq (x - r, x + r) \subseteq A$, e consequentemente, que $\mathcal{B}$ é uma base da topologia usual de $\mathbb{R}$. Além disso, como $\mathcal{B}$ é indexada pelo conjunto enumerável $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_{>0}$, concluímos que essa topologia é segundo enumerável.

Os exemplos acima mostram que espaços métricos são sempre primeiros enumeráveis e que $\mathbb{R}$, em particular, também é segundo enumerável. Os exercícios a seguir exploram os axiomas de enumerabilidade em outros espaços topológicos que já conhecemos, como a topologia cofinita, a topologia gerada por semirretas e a topologia de Sorgenfrey.

Exercício 4.1. Seja X um conjunto munido da topologia cofinita.

- (a) Mostre que, se X for enumerável, então a topologia cofinita em X é enumerável. Conclua que, nesse caso, o espaço topológico obtido é primeiro e segundo enumerável.
- (b) Mostre que, se X for não enumerável, então toda base de vizinhanças de pontos de X também é não enumerável. Conclua que, nesse caso, o espaço topológico obtido não é nem primeiro, nem segundo enumerável.

Exercício 4.2. Considere a topologia gerada por $\mathcal{B} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}$.

- (a) Encontre uma base de vizinhanças para cada ponto $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Mostre que $\mathbb{R}$ munido da topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ é primeiro e segundo enumerável.

Resolução (Zyon). (a) Sabemos, pela Proposição 4.13 que, para encontrar uma base de vizinhanças para um elemento x , basta tomar todos os elementos da base que contenham x . Portanto, $\mathcal{B}_x = \{(a, +\infty) \mid a < x\}$ é uma base de vizinhanças de x , para todo $x \in X$.

- (b) Para provar que $\mathbb{R}$ munida com a topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ é primeiro e segundo enumerável, basta mostrar que esse espaço topológico é segundo enumerável. Para isso, vamos mostrar que a família $\mathcal{B}' = \{(q, +\infty) \mid q \in \mathbb{Q}\}$ é uma base enumerável para a topologia gerada por $\mathcal{B}$ em $\mathbb{R}$.

Primeiro, vamos verificar que $\mathcal{B}'$ é uma sub-base de $\langle \mathcal{B} \rangle$. Por um lado, temos que $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, já que $(q, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, temos que $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q, +\infty)$, porque, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q < x$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$, tal que $x \in (q, +\infty)$.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{B}'$ é uma base de topologia em $\mathbb{R}$. Para isso, tome $(q_1, +\infty)$ e $(q_2, +\infty) \in \mathcal{B}'$. Observe que:

$$(q_1, +\infty) \cap (q_2, +\infty) = \begin{cases} (q_2, +\infty), & \text{se } q_1 < q_2, \\ (q_1, +\infty), & \text{se } q_2 < q_1. \end{cases}$$

Assim, é evidente que, para todo $x \in (q_1, +\infty) \cap (q_2, +\infty)$ existe $B_3 \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B_3 \subseteq (q_1, +\infty) \cap (q_2, +\infty)$.

Agora, vamos mostrar que $\langle \mathcal{B}' \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$. Para isso comece observando que, como $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, então $\langle \mathcal{B}' \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$ (ver (2.2)). Para mostrar a outra continência, utilizaremos o Lema 3.4. De fato, dado um conjunto $(a, +\infty) \in \mathcal{B}$ e um elemento $b \in (a, +\infty)$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$ (porque $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$). Assim, obtemos que $b \in (q, +\infty) \subseteq (a, +\infty)$. Pelo Lema 3.4, isso implica que a topologia $\langle \mathcal{B}' \rangle$ é mais fina que a topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$. Logo $\langle \mathcal{B}' \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$.

Para concluir, observe que $\mathcal{B}'$ é uma família enumerável, porque $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável. Daí concluímos que $\mathcal{B}'$ é uma base enumerável para $\mathbb{R}$ munido da topologia gerada por $\mathcal{B}$ e portanto, que esse espaço topológico é segundo enumerável. $\square$

Exercício 4.3. Mostre que $\mathbb{R}$ munido da topologia de Sorgenfrey é primeiro enumerável, mas não é segundo enumerável.

Resolução (Angie). (a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere a família de abertos

$$\mathcal{B}_x := \{[x, q) \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } q > x\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças enumerável para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para isso, comece fixando $x \in \mathbb{R}$. Depois, observe que, na topologia de Sorgenfrey, para todo subconjunto aberto U de $\mathbb{R}$ que contém x , existe $\varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subseteq U$. Agora lembre que, como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < x + \varepsilon$. Isso implica que, para todo subconjunto aberto U de $\mathbb{R}$ que contém x , existe $q \in \mathbb{Q}$, tal que $[x, q) \subseteq U$. Isso mostra que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças para x . Além disso, essa base é enumerável, pois a família $\mathcal{B}_x$ é indexada por $\mathbb{Q}$, que é enumerável. Isso conclui a demonstração que $\mathbb{R}$ munido da topologia de Sorgenfrey é primeiro enumerável.

(b) Agora vamos ver que esse espaço não é segundo enumerável. Para isso, seja $\mathcal{B}$ uma base da topologia de Sorgenfrey. Pela definição de base, para todo aberto U e todo ponto $x \in U$, existe um aberto básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Em particular, como a família

$$\mathcal{C} := \{[a, b) \mid a < b \in \mathbb{R}\}$$

é uma base da topologia de Sorgenfrey, podemos tomar $U \in \mathcal{C}$. Ou seja, para todo $a < b \in \mathbb{R}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subseteq [a, b)$. Além disso, como $\mathcal{C}$ é uma base da topologia de Sorgenfrey, também existirá $[c, d) \in \mathcal{C}$ tal que $a \in [c, d) \subseteq B \subseteq [a, b)$. Isso implica que $c = a$ e $a < d < b$. Consequentemente, $a = \min B$. Ou seja, para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $\min B = a$. Isso implica que todos esses conjuntos são distintos e, consequentemente, que $\mathcal{B}$ é não enumerável. $\square$

Exercício 4.4. Sejam X um conjunto e τ, τ' duas topologias em X . Para cada x em X , considere uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ para x relativa à topologia τ . Se, para todo x em X , a família $\mathcal{B}_x$ também for uma base de vizinhanças de x em relação à topologia τ' , então $\tau = \tau'$.

Resolução (Celso). Para mostrar que $\tau = \tau'$, vamos mostrar que $\tau \subseteq \tau'$ e que $\tau' \subseteq \tau$.

Para mostrar que $\tau \subseteq \tau'$, comece fixando $A \in \tau$. Como A é aberto, tem-se que A é um elemento do sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_a$ de a em relação a τ , para todo $a \in A$. Como $\mathcal{B}_a$ é uma base de vizinhanças de a para todo $a \in A$ (por hipótese), então existe $B_a \in \mathcal{B}_a$ tal que $a \in B_a \subseteq A$ para todo $a \in A$. Pelo Lema 3.4, isso implica que A é aberto em relação à topologia τ' .

A demonstraco de que $\tau' \subseteq \tau$ é completamente análoga. Isso conclui a demonstraco de que $\tau = \tau'$. □

AULA 5

Nesta aula, definiremos duas operações sobre subconjuntos de espaços topológicos: o *interior* e o *fecho*. Essas operações permitem associar a cada subconjunto Y o maior aberto contido em Y e o menor fechado que contém Y , respectivamente. Além de serem ferramentas práticas para determinar se um conjunto é aberto ou fechado, o interior e o fecho estabelecem uma dualidade fundamental entre abertos e fechados que exploraremos ao longo da aula.

5.1. Interior. Dado um subconjunto Y de um espaço topológico X , é natural perguntar qual é o maior aberto contido em Y . O interior de Y responde exatamente a essa pergunta: ele é definido como a reunião de todos os abertos contidos em Y e, por ser uma reunião arbitrária de abertos, é ele próprio aberto.

Definição 5.1 (de interior). Dados um espaço topológico X e um subconjunto $Y \subseteq X$, denote por $\mathcal{A}_Y$ a subfamília de $\mathcal{P}(X)$ formada pelos subconjuntos abertos de X contidos em Y , e defina o *interior* de Y como sendo o subconjunto $Y^\circ := \bigcup_{A \in \mathcal{A}_Y} A$.

O interior depende da topologia do espaço ambiente: topologias mais finas têm mais abertos e, portanto, o interior de um mesmo conjunto pode ser maior. Para desenvolver intuição, começaremos com os dois casos extremos (a topologia discreta e a topologia trivial) onde o cálculo é imediato.

Exemplo 5.2. Considere um conjunto X munido da topologia discreta, $\tau = \mathcal{P}(X)$, e um subconjunto $Y \subseteq X$. Como todo subconjunto de X é aberto, então

$$\mathcal{A}_Y = \{A \subseteq X \mid A \subseteq Y\}.$$

Por um lado, como $A \subseteq Y$ para todo $A \in \mathcal{A}_Y$, então $Y^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_Y} A \subseteq Y$. Por outro lado, como $Y \in \mathcal{A}_Y$, então $Y \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}_Y} A = Y^\circ$. Isso mostra que, nesse caso, $Y^\circ = Y$ para todo subconjunto $Y \subseteq X$.

No extremo oposto, na topologia trivial, os únicos abertos são $\emptyset$ e X , de modo que o interior de qualquer subconjunto próprio é vazio.

Exemplo 5.3. Considere um conjunto X munido da topologia trivial, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Se $Y \neq X$, então $\mathcal{A}_Y = \{\emptyset\}$, e portanto $Y^\circ = \emptyset$. Se $Y = X$, então $\mathcal{A}_Y = \{\emptyset, X\}$ e portanto $X^\circ = \emptyset \cup X = X$. Observe que $Y^\circ \subseteq Y$ para todo subconjunto Y , mas que, nesse caso, $Y = Y^\circ$ se, e somente se, $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.

O caso geometricamente mais rico é o da topologia usual em $\mathbb{R}$, onde o interior corresponde à noção familiar de parte aberta de um conjunto.

Exemplo 5.4. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. Por definição, o interior de um subconjunto $Y \subseteq \mathbb{R}$ é a união de todos os intervalos abertos contidos em Y . Em particular:

- Se $Y = (a, b)$ é um intervalo aberto, então $Y^\circ = (a, b) = Y$, pois Y já é aberto.

- Se $Y = [a, b)$, então $Y^\circ = (a, b)$, pois (a, b) é o maior aberto contido em $[a, b)$. De fato, todo intervalo aberto que contém o ponto a , também contém pontos menores que a , ou seja, pontos que não pertencem ao conjunto $[a, b)$.
- Analogamente, se $Y = [a, b]$ é um intervalo fechado ou se $Y = (a, b]$ é um intervalo semi-aberto, então $Y^\circ = (a, b)$ também.
- Se $Y = \{a\}$, então $Y^\circ = \emptyset$, pois nenhum intervalo aberto não vazio está contido em $\{a\}$.

Os exemplos acima sugerem diversas propriedades que o interior tem. O lema a seguir formaliza essas propriedades.

Lema 5.5. Seja (X, τ) um espaço topológico.

- Para todo subconjunto Y de X , o interior Y° é o maior (em relação à inclusão) subconjunto aberto de X contido em Y . Em particular, Y é aberto se, e somente se, $Y = Y^\circ$.
- Para todos os subconjuntos $Y_1 \subseteq Y_2$ de X , temos que $Y_1^\circ \subseteq Y_2^\circ$.
- Para todos os subconjuntos Y_1, Y_2 de X , temos que $(Y_1 \cap Y_2)^\circ = Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$.
- Para toda família de subconjuntos $\{Y_i\}_{i \in I}$ de X , temos que

$$\left(\bigcap_{i \in I} Y_i \right)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} Y_i^\circ.$$

- Para todos os subconjuntos Y_1, Y_2 de X , temos que $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ \subseteq (Y_1 \cup Y_2)^\circ$.

Demonstração. (a) Fixe um subconjunto Y de X . Vamos começar mostrando que Y° é um subconjunto aberto de X . Para isso, lembre que $Y^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_Y} A$, onde $\mathcal{A}_Y = \{A \in \tau \mid A \subseteq Y\}$ (ver Definição 5.1). Depois, observe que, como todo $A \in \mathcal{A}_Y$ é aberto, então $Y^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_Y} A$ também é aberto (ver Definição 1.1). Isso mostra que Y° é aberto.

Agora vamos mostrar que Y° é o maior aberto contido em Y . Para começar, observe que, como $A \subseteq Y$ para todo $A \in \mathcal{A}_Y$, então $Y^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_Y} A$ está contido em Y . Além disso, como todo aberto de X contido em Y pertence a $\mathcal{A}_Y$, então $Y^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_Y} A$ contém todo aberto de X contido em Y . Isso mostra que Y° é o maior aberto de X contido em Y .

Em particular, se Y for aberto, então $Y \in \mathcal{A}_Y$; o que implica que $Y \subseteq Y^\circ$. Como nós já provamos que $Y^\circ \subseteq Y$, isso mostra que, se Y for aberto, então $Y^\circ = Y$. Para mostrar a volta, basta observar que, se $Y = Y^\circ$, então o argumento do primeiro parágrafo acima mostra que Y .

- Se $Y_1 \subseteq Y_2$, então $\mathcal{A}_{Y_1} \subseteq \mathcal{A}_{Y_2}$. De fato, se $A \in \mathcal{A}_{Y_1}$, como $A \subseteq Y_1 \subseteq Y_2$ e A é aberto, então $A \in \mathcal{A}_{Y_2}$. Consequentemente, $Y_1^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_{Y_1}} A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}_{Y_2}} A = Y_2^\circ$.
- Fixe dois subconjuntos Y_1, Y_2 de X . Vamos mostrar que $(Y_1 \cap Y_2)^\circ \subseteq Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$, primeiro. Para isso, comece observando que $Y_1 \cap Y_2 \subseteq Y_1$ e $Y_1 \cap Y_2 \subseteq Y_2$. Assim, do item (b), segue que $(Y_1 \cap Y_2)^\circ \subseteq Y_1^\circ$ e $(Y_1 \cap Y_2)^\circ \subseteq Y_2^\circ$. Daí concluímos que $(Y_1 \cap Y_2)^\circ \subseteq Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$.

Agora, vamos mostrar que $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ \subseteq (Y_1 \cap Y_2)^\circ$. Para isso, comece lembrando que Y_1° e Y_2° são abertos (ver item (a)). Como consequência, $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$ também é aberto (ver Definição 1.1). Além disso, como $Y_1^\circ \subseteq Y_1$ e $Y_2^\circ \subseteq Y_2$, então temos que $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$ é um aberto contido em $Y_1 \cap Y_2$. Pelo item (a), $(Y_1 \cap Y_2)^\circ$ é o maior aberto contido em $Y_1 \cap Y_2$. Assim, $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ$ precisa estar contido em $(Y_1 \cap Y_2)^\circ$.

- (d) Fixe uma família $\{Y_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X . Como $\bigcap_{i \in I} Y_i \subseteq Y_j$ para todo $j \in I$, então $(\bigcap_{i \in I} Y_i)^\circ \subseteq Y_j^\circ$ para todo $j \in I$ (ver item (b)). Isso implica que

$$\left(\bigcap_{i \in I} Y_i \right)^\circ \subseteq \bigcap_{i \in I} Y_i^\circ.$$

- (e) Fixe dois subconjuntos Y_1, Y_2 de X . Como Y_1° e Y_2° são abertos (ver item (a)), então $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ$ também é aberto (ver Definição 1.1). Além disso, como $Y_1^\circ \subseteq Y_1$ e $Y_2^\circ \subseteq Y_2$, então $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ \subseteq Y_1 \cup Y_2$. Isso mostra que $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ$ é um aberto contido em $Y_1 \cup Y_2$. Como $(Y_1 \cup Y_2)^\circ$ é o maior aberto contido em $Y_1 \cup Y_2$ (ver item (a)), segue que $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ \subseteq (Y_1 \cup Y_2)^\circ$. $\square$

Os itens (d) e (e) do lema acima são inclusões que, em geral, são estritas. Os exemplos a seguir mostram que cada uma delas pode ser uma inclusão própria, por meio de contraexemplos na reta real.

Exemplo 5.6. Vamos construir um exemplo em que $(\bigcap_{i \in I} Y_i)^\circ \subsetneq \bigcap_{i \in I} Y_i^\circ$. Para isso, considere $\mathbb{R}$ munida da topologia usual, $I = \mathbb{Z}_{>0}$, e $Y_n = (-1/n, 1/n)$ para cada $n \in I$. Observe que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} Y_n = \{0\}$, e portanto $(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} Y_n)^\circ = \{0\}^\circ = \emptyset$. Por outro lado, como cada Y_n é aberto, temos que $Y_n^\circ = Y_n = (-1/n, 1/n)$, e portanto que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} Y_n^\circ = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} (-1/n, 1/n) = \{0\}$.

O próximo exemplo mostra que a inclusão do item (e) também pode ser estrita, mesmo para uniões de apenas dois conjuntos.

Exemplo 5.7. Vamos construir um exemplo em que $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ \subsetneq (Y_1 \cup Y_2)^\circ$. Para isso, considere $\mathbb{R}$ munido da sua topologia usual, $Y_1 = [-1, 0]$ e $Y_2 = [0, 1]$. Lembre que $Y_1^\circ = (-1, 0)$ e $Y_2^\circ = (0, 1)$. Assim, $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ = (-1, 0) \cup (0, 1)$. Por outro lado, observe que $Y_1 \cup Y_2 = [-1, 1]$ e, conseqüentemente, que $(Y_1 \cup Y_2)^\circ = (-1, 1)$. Portanto $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ = (-1, 0) \cup (0, 1) \subsetneq (-1, 1) = (Y_1 \cup Y_2)^\circ$, pois o ponto 0 pertence a $(Y_1 \cup Y_2)^\circ$ e não pertence a $Y_1^\circ \cup Y_2^\circ$.

Vamos concluir essa seção com uma proposição que caracteriza o interior de um conjunto diretamente em termos de abertos e de abertos básicos, sem precisar calcular a união de toda a família $\mathcal{A}_Y$. Isso a torna especialmente útil na prática.

Proposição 5.8. Sejam (X, τ) um espaço topológico, x um elemento de X , Y um subconjunto de X , e $\mathcal{B}$ uma base da topologia τ . As seguintes três afirmações são equivalentes:

- (a) O elemento x pertence a Y° .
- (b) Existe um aberto $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq Y$.

(c) Existe um aberto básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq Y$.

Demonstração. Vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

Para mostrar que $(a) \Rightarrow (b)$, suponha que $x \in Y^\circ$. Pela definição de Y° , (ver Definição 5.1), isso significa que $x \in A$ para algum $A \in \mathcal{A}_Y$. Ou seja, existe um aberto A de X tal que $A \subseteq Y$ e $x \in A$.

Para mostrar que $(b) \Rightarrow (c)$, suponha que exista um aberto A de X tal que $x \in A \subseteq Y$. Como $\mathcal{B}$ é uma base da topologia τ , então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$ (ver Lema 4.12(b)).

Para mostrar que $(c) \Rightarrow (a)$, suponha que exista um aberto básico B tal que $x \in B \subseteq Y$. Como B é um aberto contido em Y , então $B \in \mathcal{A}_Y$. Daí, do fato que $x \in B$ da definição de Y° (Definição 5.1), segue que $x \in Y^\circ$. $\square$

5.2. Fecho. O fecho é a operação dual ao interior: enquanto o interior aproxima Y por baixo com abertos, o fecho aproxima Y por cima com fechados. Dado um subconjunto Y de um espaço topológico X , o fecho de Y é definido como a interseção de todos os fechados que contêm Y . Por ser uma interseção arbitrária de fechados, o fecho é ele próprio fechado, e é o menor fechado que contém Y . Vamos explorar esse conceito nessa seção.

Definição 5.9 (de fecho). Dados um espaço topológico X e um subconjunto $Y \subseteq X$, denote por $\mathcal{Z}_Y$ a subfamília de $\mathcal{P}(X)$ formada pelos subconjuntos fechados de X que contêm Y , e defina o **fecho** de Y como sendo o subconjunto $\bar{Y} := \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_Y} Z$.

Assim como fizemos para o interior, comecemos calculando exemplos concretos de fechos nas duas topologias mais extremas.

Exemplo 5.10. Considere um conjunto X munido da topologia discreta, $\tau = \mathcal{P}(X)$, e um subconjunto $Y \subseteq X$. Como todo subconjunto de X é aberto e fechado, então $\mathcal{Z}_Y = \{Z \subseteq X \mid Y \subseteq Z\}$. Assim, por um lado, como $Y \subseteq Z$ para todo $Z \in \mathcal{Z}_Y$, então $Y \subseteq \bar{Y} = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_Y} Z$. Por outro lado, como $Y \in \mathcal{Z}_Y$, então $\bar{Y} = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_Y} Z \subseteq Y$. Isso mostra que $\bar{Y} = Y$.

Na topologia trivial, os únicos fechados são $\emptyset$ e X , de modo que o fecho de qualquer subconjunto não vazio é X .

Exemplo 5.11. Considere um conjunto X munido da topologia trivial, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Se $Y = \emptyset$, então $\mathcal{Z}_Y = \{\emptyset, X\}$, e portanto $\bar{\emptyset} = \emptyset \cap X = \emptyset$. Mas, se Y é não vazio, então $\mathcal{Z}_Y = \{X\}$, e portanto $\bar{Y} = X$. Observe que $Y \subseteq \bar{Y}$ para todo subconjunto Y , mas que, nesse caso, $Y = \bar{Y}$ se, e somente se, $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.

Na topologia usual de $\mathbb{R}$, o fecho de um subconjunto corresponde à noção familiar de acrescentar os pontos de acumulação. Vamos ver isso no próximo exemplo.

Exemplo 5.12. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. Lembre que o fecho de um subconjunto $Y \subseteq \mathbb{R}$ é a interseção de todos os fechados que contêm Y . Em particular:

- Se $Y = [a, b]$ é um intervalo fechado, então $\overline{Y} = [a, b] = Y$, pois Y já é fechado.
- Se $Y = (a, b)$ é um intervalo aberto, então $\overline{Y} = [a, b]$, pois não existe nenhum fechado que contenha (a, b) e não contenha a e b . De fato, se Z for um fechado, então o seu complementar é aberto. Ou seja, para todo $x \notin Z$, existe um intervalo aberto que contém x e que não intersecta Z . Assim, se Z for um fechado que não contém a (ou b), então existe um intervalo aberto contendo a (ou b , respectivamente) que não intersecta Z . Isso implica que Z não pode conter todos os pontos do intervalo (a, b) .
- Analogamente, se $Y = [a, b)$ ou $Y = (a, b]$, então $\overline{Y} = [a, b]$.
- Se $Y = \{a\}$, então $\overline{Y} = \{a\}$, pois todo ponto é fechado em $\mathbb{R}$.

Assim como o interior, o fecho satisfaz diversas propriedades em relação a inclusão, união e interseção de subconjuntos. O lema a seguir torna essas propriedades precisas.

Lema 5.13. Seja X um espaço topológico.

- Para todo subconjunto Y de X , o fecho $\overline{Y}$ é o menor (em relação à inclusão) subconjunto fechado de X que contém Y . Em particular, Y é fechado se, e somente se, $Y = \overline{Y}$.
- Para todos os subconjuntos $Y_1 \subseteq Y_2$ de X , temos que $\overline{Y_1} \subseteq \overline{Y_2}$.
- Para todos os subconjuntos Y_1, Y_2 de X , temos que $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$.
- Para toda família de subconjuntos $\{Y_i\}_{i \in I}$ de X , temos que

$$\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}.$$

- Para todos os subconjuntos Y_1, Y_2 de X , temos que $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$.

Demonstração. (a) Fixe um subconjunto Y de X . Vamos começar mostrando que $\overline{Y}$ é um conjunto fechado. Para isso, lembre que $\overline{Y} = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_Y} Z$. Como todo $Z \in \mathcal{Z}_Y$ é fechado, a Proposição 2.2 garante que $\overline{Y}$ também é fechado.

Agora, vamos mostrar que $\overline{Y}$ é o menor fechado que contém Y . Para isso, comece observando que $Y \subseteq Z$ para todo $Z \in \mathcal{Z}_Y$. Daí, segue que Y está contido em $\bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_Y} Z = \overline{Y}$. Além disso, como $\mathcal{Z}_Y$ consiste de todos os fechados de X que contêm Y , então $\overline{Y} \subseteq Z$ para todo $Z \in \mathcal{Z}_Y$. Isso mostra que $\overline{Y}$ é o menor fechado que contém Y .

Em particular, se Y for fechado, ele será o menor fechado que contém Y ; ou seja, $Y = \overline{Y}$. Reciprocamente, se $Y = \overline{Y}$, então Y será fechado, pelo argumento mostrado no primeiro parágrafo acima.

- Se $Y_1 \subseteq Y_2$, então $\mathcal{Z}_{Y_2} \subseteq \mathcal{Z}_{Y_1}$. De fato, se Z for um subconjunto fechado de X tal que $Y_2 \subseteq Z$, então $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Z$, ou seja, Z é um fechado que também contém Y_1 . Assim, $\overline{Y_1} = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_{Y_1}} Z \subseteq \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_{Y_2}} Z = \overline{Y_2}$.

- (c) Sejam Y_1, Y_2 dois subconjuntos de X . Vamos mostrar que $\overline{Y_1 \cup Y_2} \subseteq \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$, primeiro. Para isso, lembre que $\overline{Y_1}$ e $\overline{Y_2}$ são fechados (ver item (a)). Daí e da Proposição 2.2, segue que $\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$ também é fechado. Além disso, como $Y_1 \subseteq \overline{Y_1}$ e $Y_2 \subseteq \overline{Y_2}$, obtemos que $Y_1 \cup Y_2 \subseteq \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$. Ou seja, $\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$ é um fechado que contém $Y_1 \cup Y_2$. Como $\overline{Y_1 \cup Y_2}$ é o menor fechado que contém $Y_1 \cup Y_2$, segue que $\overline{Y_1 \cup Y_2} \subseteq \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$.

Agora, vamos mostrar que $\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2} \subseteq \overline{Y_1 \cup Y_2}$. Para isso, comece observando que $Y_1 \subseteq Y_1 \cup Y_2$ e $Y_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2$. Daí e do item (b), segue que $\overline{Y_1} \subseteq \overline{Y_1 \cup Y_2}$ e $\overline{Y_2} \subseteq \overline{Y_1 \cup Y_2}$. Consequentemente, temos que $\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2} \subseteq \overline{Y_1 \cup Y_2}$.

- (d) Seja $\{Y_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de X . Observe que $Y_i \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$ para todo $i \in I$. Daí e do item (b), segue que $\overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$ para todo $i \in I$. Consequentemente, obtemos que $\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$.
- (e) Sejam Y_1, Y_2 dois subconjuntos de X . Vamos mostrar que $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$ é um subconjunto fechado que contém $Y_1 \cap Y_2$. Para começar, lembre que $\overline{Y_1}$ e $\overline{Y_2}$ são fechados (ver item (a)). Daí e da Proposição 2.2, segue que $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$ também é fechado. Além disso, como $Y_1 \cap Y_2 \subseteq Y_1 \subseteq \overline{Y_1}$ e $Y_1 \cap Y_2 \subseteq Y_2 \subseteq \overline{Y_2}$, então $Y_1 \cap Y_2 \subseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$; ou seja, $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$ é um subconjunto fechado que contém $Y_1 \cap Y_2$. Como $\overline{Y_1 \cap Y_2}$ é o menor fechado que contém $Y_1 \cap Y_2$ (ver item (a)), segue que $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$. $\square$

Os itens (d) e (e) do lema são inclusões que podem ser estritas. Os exemplos a seguir exibem contraexemplos para cada uma delas.

Exemplo 5.14. Vamos construir um exemplo em que $\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \subsetneq \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$. Para isso, considere $X = \mathbb{R}$ munido da topologia usual. Seja $I = \mathbb{Z}_{>0}$ e, para cada $n \in I$, seja $Y_n = \mathbb{R} \setminus [-1/n, 1/n]$. Observe que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} Y_n = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} [-1/n, 1/n] = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e portanto $\overline{\bigcup_{n \in I} Y_n} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$. Por outro lado, $\overline{Y_n} = \mathbb{R} \setminus (-1/n, 1/n)$ para cada n , e assim

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} \overline{Y_n} = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} (-1/n, 1/n) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Portanto $\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R} = \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$.

Exemplo 5.15. Vamos construir agora um exemplo em que $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subsetneq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$. Para isso, considere $X = \mathbb{R}$ munido da topologia usual, $Y_1 = (-\infty, 0)$ e $Y_2 = (0, \infty)$. Como $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ é fechado, temos que $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \emptyset$. Por outro lado, observe que $\overline{Y_1} = (-\infty, 0]$ e $\overline{Y_2} = [0, \infty)$, e consequentemente, que $\overline{Y_1} \cap \overline{Y_2} = \{0\}$. Portanto,

$$\overline{Y_1 \cap Y_2} = \emptyset \subsetneq \{0\} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}.$$

A proposição a seguir caracteriza os pontos do fecho de Y em termos de sua relação com os abertos de X : um ponto pertence a $\overline{Y}$ se, e somente se, todo aberto que o contém intersecta Y . Essa caracterização é análoga à da Proposição 5.8 para

o interior e também admite uma formulação equivalente em termos de elementos de uma base.

Proposição 5.16. Sejam (X, τ) um espaço topológico, x um elemento de X , Y um subconjunto de X , e $\mathcal{B}$ uma base da topologia τ . As seguintes três afirmações são equivalentes:

- (a) O elemento x pertence a $\overline{Y}$.
- (b) Para todo aberto $A \subseteq X$ contendo x , temos que $A \cap Y \neq \emptyset$.
- (c) Para todo $B \in \mathcal{B}$ contendo x , temos que $B \cap Y \neq \emptyset$.

Demonstração. Vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

Para mostrar que $(a) \Rightarrow (b)$, fixe um elemento $x \in \overline{Y}$. Como $\overline{Y} = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_Y} Z$, então x pertence a todo subconjunto fechado que contém Y . Agora suponha que A seja um aberto contendo x . Observe que: como A é aberto, então $X \setminus A$ é fechado; e como $x \in A$, então $x \notin X \setminus A$. Isso significa que $X \setminus A$ é um fechado que não contém x . Portanto, $X \setminus A$ não pode conter Y ; ou seja, Y não pode estar contido em $X \setminus A$. Logo, $A \cap Y \neq \emptyset$.

A implicação $(b) \Rightarrow (c)$ segue direto da hipótese e do fato de que todo $B \in \mathcal{B}$ (ver Definição 2.5). De fato, se $B \in \mathcal{B}$, então B é um aberto. Além disso, como $x \in B$, então segue da hipótese que $B \cap Y \neq \emptyset$.

Para mostrar a implicação $(c) \Rightarrow (a)$, suponha que, para todo $B \in \mathcal{B}$ que contém x , temos que $B \cap Y \neq \emptyset$. Queremos mostrar que $x \in \overline{Y}$. Pela definição de fecho, isso é equivalente a mostrar que $x \in Z$ para todo $Z \in \mathcal{Z}_Y$. Assim, vamos fixar um fechado $Z \in \mathcal{Z}_Y$, ou seja, um fechado de X tal que $Y \subseteq Z$, e mostrar que $x \in Z$. Como Z é fechado, então, pelo Lema 4.12(c), para todo $x' \in X \setminus Z$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap Z = \emptyset$. Como $Y \subseteq Z$, isso implica que $B \cap Y = \emptyset$ também. Por hipótese, para todo $B \in \mathcal{B}$ que contém x , temos que $B \cap Y \neq \emptyset$. Logo x não pode pertencer a $X \setminus Z$, ou seja, x tem que pertencer a Z . Isso mostra que $x \in Z$ para todo $Z \in \mathcal{Z}_Y$, e consequentemente, que $x \in \overline{Y}$. $\square$

Assim como abertos e fechados estão relacionados entre si, as operações de interior e fecho não são independentes: cada uma determina a outra por complemento. A proposição a seguir torna essa dualidade precisa.

Proposição 5.17. Seja X um espaço topológico. Para todo subconjunto Y de X , temos que:

- (a) $X \setminus \overline{Y} = (X \setminus Y)^\circ$.
- (b) $X \setminus Y^\circ = \overline{X \setminus Y}$.

Demonstração. (a) Para mostrar a igualdade $X \setminus \overline{Y} = (X \setminus Y)^\circ$, vamos mostrar que $X \setminus \overline{Y} \subseteq (X \setminus Y)^\circ$ e que $(X \setminus Y)^\circ \subseteq X \setminus \overline{Y}$.

Para mostrar a inclusão $X \setminus \overline{Y} \subseteq (X \setminus Y)^\circ$, vamos começar mostrando que o conjunto $X \setminus \overline{Y}$ é um aberto contido em $X \setminus Y$. De fato, como $\overline{Y}$ é fechado

(ver Lema 5.13(a)), então $X \setminus \overline{Y}$ é aberto. Além disso, como $Y \subseteq \overline{Y}$, então $X \setminus \overline{Y} \subseteq X \setminus Y$. Isso mostra que $X \setminus \overline{Y}$ é um aberto contido em $X \setminus Y$. Daí e da definição de interior (Definição 5.1), vemos que $X \setminus \overline{Y} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}_{X \setminus Y}} A = (X \setminus Y)^\circ$.

Para mostrar inclusão $(X \setminus Y)^\circ \subseteq X \setminus \overline{Y}$, vamos começar mostrando que $X \setminus (X \setminus Y)^\circ$ é um fechado que contém Y . De fato, como $(X \setminus Y)^\circ$ é aberto (ver Lema 5.5(a)), então $X \setminus (X \setminus Y)^\circ$ é fechado. Além disso, como $(X \setminus Y)^\circ \subseteq X \setminus Y$, então $Y = X \setminus (X \setminus Y) \subseteq X \setminus (X \setminus Y)^\circ$. Isso mostra que $X \setminus (X \setminus Y)^\circ$ é um fechado que contém Y . Daí e da definição de fecho (Definição 5.9), obtemos que $\overline{Y} = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_Y} Z \subseteq X \setminus (X \setminus Y)^\circ$. Como consequência, temos que $(X \setminus Y)^\circ \subseteq X \setminus \overline{Y}$.

(b) Aplicando a parte (a) com Y substituído por $X \setminus Y$, obtemos que

$$X \setminus \overline{X \setminus Y} = (X \setminus (X \setminus Y))^\circ = Y^\circ.$$

Daí, concluímos que $X \setminus Y^\circ = X \setminus (X \setminus \overline{X \setminus Y}) = \overline{X \setminus Y}$. $\square$

Para concluir essa aula, vamos enunciar alguns exercícios que exploram as operações de interior e fecho em espaços topológicos concretos. Os primeiros dois exercícios têm uma natureza mais computacional, o terceiro introduz a noção de fronteira de um conjunto, e o quarto explora como as operações de interior e fecho interagem entre elas.

Exercício 5.1. Descreva o fecho e o interior de todos os subconjuntos de $X = \{x, y\}$ munido da topologia de Sierpinski.

Resolução (Daniel). Primeiro, lembre que a topologia de Sierpinski em $X = \{x, y\}$ é $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$. Assim, os subconjuntos fechados de X em relação a essa topologia são $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{y\}, X\}$. Agora vamos calcular o interior e o fecho de cada um dos subconjuntos de X :

- No caso do subconjunto $\emptyset$: o único subconjunto contido nele é o próprio $\emptyset$, e todo subconjunto fechado o contém. Assim,

$$\emptyset^\circ = \emptyset \quad \text{e} \quad \overline{\emptyset} = \emptyset \cap \{y\} \cap X = \emptyset.$$

- No caso do subconjunto $\{x\}$: os abertos contidos nele são $\emptyset$ e o próprio $\{x\}$, e o único fechado que o contém é X . Assim:

$$\{x\}^\circ = \emptyset \cup \{x\} = \{x\} \quad \text{e} \quad \overline{\{x\}} = X.$$

- No caso do subconjunto $\{y\}$: o único aberto contidos nele é $\emptyset$, e os fechados que o contém são o próprio $\{y\}$ e X . Assim:

$$\{y\}^\circ = \emptyset \quad \text{e} \quad \overline{\{y\}} = \{y\} \cap X = \{y\}.$$

- No caso do subconjunto X : todo subconjunto aberto está contido em X , e o único fechado que o contém é o próprio X . Assim:

$$X^\circ = \emptyset \cup \{x\} \cup X = X \quad \text{e} \quad \overline{X} = X. \quad \square$$

Exercício 5.2. Descreva o fecho e o interior de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ munido da topologia cofinita.

Resolução (Israel). Comece lembrando que o fecho de um conjunto é o menor conjunto fechado que o contém (ver Lema 5.13(a)), e que o interior de um conjunto é o maior conjunto aberto contido nele (ver Lema 5.5(a)). Depois, lembre que os subconjuntos de $\mathbb{R}$ fechados em relação à topologia cofinita são os subconjuntos finitos e o próprio $\mathbb{R}$. Assim, os subconjuntos abertos que formam a topologia cofinita são os conjuntos A tais que $\mathbb{R} \setminus A$ é finito ou $A = \emptyset$.

Para calcular o fecho e o interior dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, vamos analisar dois casos:

- Subconjuntos finitos. Todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado e, dessa forma, seu fecho é ele mesmo. Agora, observe que o único subconjunto aberto e finito é o conjunto $\emptyset$, porque $\mathbb{R}$ é infinito e seus fechados próprios são finitos. Isso implica que o interior de todo conjunto finito é $\emptyset$.
- Subconjuntos infinitos. O único fechado que o contém um subconjunto infinito é $\mathbb{R}$, pois os demais são todos finitos. Isso implica que o fecho de todo conjunto infinito é $\mathbb{R}$. Para determinar o interior dos subconjuntos infinitos, nós vamos precisar analisar dois subcasos.

Se seu complementar for finito, então o conjunto será aberto e seu interior será ele mesmo. Se seu complementar for infinito, então seu interior será vazio. De fato, suponha que X seja um subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que X é infinito e $\mathbb{R} \setminus X$ é infinito. Como X° é um aberto contido em X , então $(\mathbb{R} \setminus X) \subseteq (\mathbb{R} \setminus X^\circ)$. Isso implica que X° é um aberto cujo complementar é infinito. Logo, $X^\circ = \emptyset$. $\square$

Exercício 5.3. Dados um espaço topológico X e um subconjunto $Y \subseteq X$, a **fronteira** de Y é definida como o subconjunto $\partial Y := \overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$.

- Mostre que $Y^\circ \cap \partial Y = \emptyset$.
- Mostre que $\overline{Y} = Y^\circ \cup \partial Y$.
- Mostre que Y é aberto se, e somente se, $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y$.
- Mostre que $\partial Y = \emptyset$ se, e somente se, Y é aberto e fechado.

Resolução (Mateus). (a) Para mostrar que $Y^\circ \cap \partial Y = \emptyset$, comece observando que, pela definição de fronteira, temos que

$$Y^\circ \cap \partial Y = Y^\circ \cap (\overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y}) \subseteq Y^\circ \cap \overline{X \setminus Y}.$$

Depois, lembre do Lema 5.17(b) que $\overline{X \setminus Y} = X \setminus Y^\circ$. Assim,

$$Y^\circ \cap \partial Y \subseteq Y^\circ \cap \overline{X \setminus Y} = Y^\circ \cap (X \setminus Y^\circ).$$

Como $Y^\circ \cap (X \setminus Y^\circ) = \emptyset$, concluímos daí que $Y^\circ \cap \partial Y = \emptyset$.

- Para mostrar a igualdade $\overline{Y} = Y^\circ \cup \partial Y$, vamos mostrar as duas continências $Y^\circ \cup \partial Y \subseteq \overline{Y}$ e $\overline{Y} \subseteq Y^\circ \cup \partial Y$. Primeiramente, como $Y^\circ \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$ e $\partial Y \subseteq \overline{Y}$, segue que $Y^\circ \cup \partial Y \subseteq \overline{Y}$. Isso mostra a primeira continência. Reciprocamente, seja $x \in \overline{Y}$. Se $x \in Y^\circ$, então $x \in Y^\circ \cup \partial Y$. Caso contrário, se $x \in \overline{Y}$ e $x \notin Y^\circ$, então $x \in \overline{Y} \cap (X \setminus Y^\circ)$. Como $X \setminus Y^\circ = \overline{X \setminus Y}$ (ver Lema 5.17(b)), segue que

$$x \in \overline{Y} \cap (X \setminus Y^\circ) = \overline{Y} \cap \overline{X \setminus Y} = \partial Y.$$

Isso mostra a segunda continência e implica que $\bar{Y} = Y^\circ \cup \partial Y$.

- (c) Comece lembrando da definição de fronteira que $\partial Y = \bar{Y} \cap \overline{X \setminus Y}$. Depois, lembre do Lema 5.17(b) que $\overline{X \setminus Y} = X \setminus Y^\circ$. Assim, em geral, temos que

$$\partial Y = \bar{Y} \cap \overline{X \setminus Y} = \bar{Y} \cap (X \setminus Y^\circ) = \bar{Y} \setminus Y^\circ.$$

No caso em que Y é aberto, temos que $Y^\circ = Y$. Assim, nesse caso, $\partial Y = \bar{Y} \setminus Y$. Reciprocamente, se $\partial Y = \bar{Y} \setminus Y$, então $Y = Y^\circ$. Caso contrário, se $Y \setminus Y^\circ$ fosse não vazio, existiria $x \in Y \setminus Y^\circ$, que pertenceria a $\bar{Y}$, pertenceria a Y e não pertenceria a Y° . Isso contradiria a hipótese de que $\bar{Y} \setminus Y = \partial Y = \bar{Y} \setminus Y^\circ$.

- (d) Suponha primeiro que $\partial Y = \emptyset$. Pelo item (c), isso significa que $\bar{Y} = Y^\circ$. Como sempre vale que $Y^\circ \subseteq Y \subseteq \bar{Y}$, isso implica que $Y^\circ = Y$ e $Y = \bar{Y}$. Pelos Lemas 5.5(a) e 5.13(a), isso significa que Y é aberto e fechado. Reciprocamente, suponha que Y é aberto e fechado. Pelos Lemas 5.5(a) e 5.13(a), isso significa que $Y = Y^\circ$ e $Y = \bar{Y}$. Assim, do item (c), obtemos que $\partial Y = \bar{Y} \setminus Y^\circ = \emptyset$. $\square$

Exercício 5.4. Encontre um espaço topológico X e um subconjunto $Y \subseteq X$ tais que $Y^\circ \subsetneq \bar{Y}^\circ \subsetneq Y \subsetneq \bar{Y}^\circ \subsetneq \bar{Y}$.

Resolução (Roger). Considere a reta real $X = \mathbb{R}$ munida da sua topologia usual e seu subconjunto $Y = (1, 2) \cup ((3, 4) \cap \mathbb{Q})$. Observe que $Y^\circ = (1, 2)$ e, consequentemente, que $\bar{Y}^\circ = [1, 2]$. Observe também que $\bar{Y} = [1, 2] \cup [3, 4]$ e, consequentemente, que $\bar{Y}^\circ = (1, 2) \cup (3, 4)$. Assim, temos que

$$Y^\circ \subsetneq \bar{Y}^\circ \subsetneq Y \subsetneq \bar{Y}^\circ \subsetneq \bar{Y}. \quad \square$$

AULA 6

Nesta aula, introduziremos o conceito de função contínua entre espaços topológicos, que generaliza a noção clássica de continuidade de funções entre espaços métricos como a reta real. Em seguida, estudaremos funções abertas, fechadas e homeomorfismos. Os homeomorfismos desempenham para os espaços topológicos o mesmo papel que os isomorfismos desempenham na álgebra: eles identificam espaços que são, do ponto de vista topológico, essencialmente os mesmos.

6.1. Funções contínuas. A continuidade é a noção fundamental para relacionar espaços topológicos mantendo as suas estruturas. A ideia é generalizar a definição de continuidade da Análise. Começaremos essa seção com a definição formal de função contínua e em seguida verificaremos que ela recupera os exemplos clássicos. Para concluir, mostraremos alguns resultados úteis.

Definição 6.1 (de função contínua). Sejam X, Y dois espaços topológicos e x um elemento de X . Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita **contínua em x** quando, para todo subconjunto aberto $V \subseteq Y$ contendo $f(x)$, a imagem inversa $f^{-1}(V) \subseteq X$ também é aberto; e f é dita **contínua** (em X) quando f é contínua em todo $x \in X$. O conjunto de funções $f : X \rightarrow Y$ contínuas será denotado por $C(X, Y)$.

Vamos ver como a definição abstrata acima se aplica a exemplos concretos. Para começar, vamos verificar que funções identidade e funções constantes são contínuas em qualquer espaço topológico.

Exemplo 6.2. Considere um espaço topológico X . Vamos mostrar que a função identidade $\text{id}_X : X \rightarrow X$, dada por $\text{id}_X(x) = x$ para todo $x \in X$, é contínua. De fato, para todo aberto $V \subseteq X$, temos que sua imagem inversa por id_X é:

$$\text{id}_X^{-1}(V) = \{x \in X \mid \text{id}_X(x) \in V\} = \{x \in X \mid x \in V\} = V.$$

Como V é aberto por hipótese, segue que id_X é contínua.

Exemplo 6.3. Considere dois espaços topológicos, X e Y , e um elemento $y_0 \in Y$. Vamos mostrar que a função constante $c : X \rightarrow Y$ dada por $c(x) = y_0$ para todo $x \in X$, é contínua. De fato, dado um aberto $V \subseteq Y$, temos duas possibilidades:

- $y_0 \in V$: nesse caso, $c^{-1}(V) = \{x \in X \mid c(x) \in V\} = \{x \in X \mid y_0 \in V\} = X$, que é aberto em X .
- $y_0 \notin V$: nesse caso, $c^{-1}(V) = \{x \in X \mid c(x) \in V\} = \{x \in X \mid y_0 \in V\} = \emptyset$, que também é aberto em X .

Isso mostra que $c^{-1}(V)$ é aberto em X para todo aberto V de Y . Como consequência, c é contínua.

No próximo exemplo, vamos mostrar que a composição de funções contínuas é contínua. Além de criar uma ferramenta para construir novas funções contínuas, esse exemplo, junto com o fato de que funções identidade são contínuas e que composições

de funções são associativas, diz que os espaços topológicos e as funções contínuas formam uma categoria.

Exemplo 6.4. Considere três espaços topológicos, X , Y e Z , e duas funções contínuas, $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$. Vamos mostrar que a função composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ também é contínua.

Para justificar essa afirmação, precisamos mostrar que, se V é um aberto em Z , então $(g \circ f)^{-1}(V)$ é um aberto em X . Para justificar isso, comece observando que $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$. Depois, observe que, como $g : Y \rightarrow Z$ é contínua e V é aberto em Z (por hipótese), então $g^{-1}(V)$ é aberto em Y . Para concluir, observe que, como f é contínua e $g^{-1}(V)$ é aberto em Y , então $f^{-1}(g^{-1}(V))$ é aberto em X . Isso mostra que $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ é aberto em X .

Além da caracterização por pré-imagens de abertos, a continuidade admite descrições equivalentes que são frequentemente mais convenientes de serem usadas: em termos de vizinhanças, de bases de vizinhanças, e de pré-imagens de fechados. O lema a seguir reúne essas equivalências.

Lema 6.5. Sejam X e Y dois espaços topológicos, seja $f : X \rightarrow Y$ uma função, para cada $x \in X$, seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x , e para cada $y \in Y$, seja $\mathcal{B}_y$ uma base de vizinhanças de y . As seguintes condições são equivalentes:

- (a) f é contínua.
- (b) Para todo $x \in X$ e $V \in \mathcal{U}_{f(x), Y}$, existe $U \in \mathcal{U}_{x, X}$ tal que $f(U) \subseteq V$.
- (c) Para todo $x \in X$ e $C \in \mathcal{B}_{f(x)}$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $f(B) \subseteq C$.
- (d) Para todo subconjunto fechado $Z \subseteq Y$, a imagem inversa $f^{-1}(Z) \subseteq X$ também é fechada.

Demonstração. Vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Suponha que f é contínua. Fixe $x \in X$ e $V \in \mathcal{U}_{f(x), Y}$. Pela definição de vizinhança, existe um aberto $W \subseteq Y$ tal que $f(x) \in W \subseteq V$ (ver Definição 4.1). Como f é contínua (por hipótese) e W é aberto (por construção), então $f^{-1}(W)$ é aberto em X . Para concluir, basta observar que $f^{-1}(W) \in \mathcal{U}_{x, X}$ e que $f(f^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq V$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Dado $C \in \mathcal{B}_{f(a)}$, como $\mathcal{B}_{f(a)} \subseteq \mathcal{U}_{f(a), Y}$, por hipótese existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $f(U) \subseteq C$. Como $\mathcal{B}_a$ é uma base de vizinhanças de a , existe $B \in \mathcal{B}_a$ tal que $B \subseteq U$, e portanto $f(B) \subseteq f(U) \subseteq C$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Seja $Z \subseteq Y$ fechado. Para mostrar que $f^{-1}(Z)$ é fechado em X , basta mostrar que $X \setminus f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y \setminus Z)$ é aberto. Fixe $x \in f^{-1}(Y \setminus Z)$, de modo que $f(x) \in Y \setminus Z$. Como Z é fechado, $Y \setminus Z$ é aberto; como $\mathcal{B}_{f(x)}$ é base de vizinhanças, existe $C \in \mathcal{B}_{f(x)}$ tal que $C \subseteq Y \setminus Z$. Por hipótese, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $f(B) \subseteq C \subseteq Y \setminus Z$, logo $B \subseteq f^{-1}(Y \setminus Z)$. Pelo Lema 4.12(b), isso implica que $f^{-1}(Y \setminus Z)$ é aberto.

(d) $\Rightarrow$ (a): Se V é aberto em Y , então $Y \setminus V$ é fechado em Y . Por hipótese, $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ é fechado em X . Logo $f^{-1}(V)$ é aberto em X , e f é contínua. $\square$

Agora, vamos usar o lema anterior para mostrar que a definição de função contínua para espaços topológicos abstratos é compatível com a noção de continuidade de espaços métricos.

Exemplo 6.6. Sejam X e Y dois espaços métricos. Lembre que, nesse contexto, uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita contínua em um ponto $x \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. Pelo Lema 6.5, essa noção é equivalente à definição de continuidade no sentido da Definição 6.1.

Vamos concluir essa primeira parte da aula com alguns exercícios que exploram a continuidade em situações concretas. Vamos começar com um exercício que caracteriza continuidade em termos de fechos e assim recobra a noção de continuidade do Cálculo.

Exercício 6.1. Sejam X, Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Mostre que f é contínua se, e somente se, $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ para todo subconjunto $S \subseteq X$.

Resolução (Zyion). ($\Rightarrow$): Suponha que $f : X \rightarrow Y$ é contínua. Queremos mostrar que $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ para todo subconjunto $S \subseteq X$. Para isso, fixe um subconjunto S de X e um elemento $x \in \overline{S}$. Vamos mostrar que, para todo aberto B de Y que contém $f(x)$, temos que $B \cap f(S) \neq \emptyset$. Pela Proposição 5.16, isso vai implicar que $f(x) \in \overline{f(S)}$.

Seja B um aberto de Y que contém $f(x)$. Como f é contínua, então $f^{-1}(B)$ é aberto em X que contém x . Como $x \in \overline{S}$ e $f^{-1}(B)$ é um aberto contendo x , então $f^{-1}(B) \cap S \neq \emptyset$ (ver Proposição 5.16). Assim, se tomarmos $s \in f^{-1}(B) \cap S$, teremos que $f(s) \in B \cap f(S)$. Isso mostra que $B \cap f(S) \neq \emptyset$ e implica que $f(x) \in \overline{f(S)}$.

($\Leftarrow$): Suponha que $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$ para todo subconjunto $S \subseteq X$. Queremos mostrar que f é contínua. Para isso, vamos mostrar que, se Z for um subconjunto fechado de Y , então $f^{-1}(Z)$ é um subconjunto fechado de X . Pelo Lema 6.5, isso vai implicar que f é contínua.

Seja Z um subconjunto fechado de Y . Denote $f^{-1}(Z) =: S$. Queremos mostrar que S é fechado. Para isso, vamos mostrar que $\overline{S} \subseteq S$. Como S sempre está contido em $\overline{S}$ (ver Definição 5.9), isso implicará que $S = \overline{S}$. Pelo Lema 5.13(a), isso vai implicar que S é fechado em X .

Para mostrar que $\overline{S} \subseteq S$, comece observando que $f(S) = f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$. Daí, da hipótese de que $f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$, e da hipótese que Z é fechado, segue que

$$f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)} \subseteq \overline{Z} = Z.$$

Isso, por sua vez, implica que $f^{-1}(f(\overline{S})) \subseteq f^{-1}(Z) = S$. Como $\overline{S} \subseteq f^{-1}(f(\overline{S}))$, isso implica que $\overline{S} \subseteq S$. Daí, concluímos que S é fechado e, consequentemente, que f é contínua. $\square$

Exercício 6.2. Sejam (X, d) um espaço métrico e x um ponto em X . Mostre que a função $d(x, -) : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, -)(y) := d(x, y)$ é contínua.

Exercício 6.3. Sejam X um espaço topológico e $Y = \{0, 1\}$ munido da topologia discreta. Para cada subconjunto $S \subseteq X$, defina a função característica $\chi_S : X \rightarrow Y$ por

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in S, \\ 0, & \text{se } x \notin S. \end{cases}$$

Mostre que χ_S é contínua se, e somente se, $S \subseteq X$ é aberto e fechado.

Resolução (Angie). ($\Rightarrow$): Suponha que χ_S é contínua. Queremos mostrar que S é aberto e fechado em X . Ou seja, que S é aberto e $X \setminus S$ também. Para isso observe que, como χ_S é contínua e $\{1\}$ é aberto em Y , então

$$\chi_S^{-1}(\{1\}) = \{x \in X \mid \chi_S(x) \in \{1\}\} = \{x \in X \mid x \in S\} = S$$

é aberto em X . Analogamente, como χ_S é contínua e $\{0\}$ é aberto em Y , então

$$\chi_S^{-1}(\{0\}) = \{x \in X \mid \chi_S(x) \in \{0\}\} = \{x \in X \mid x \notin S\} = X \setminus S$$

também é aberto em X . Isso mostra que S é aberto e fechado em X .

($\Leftarrow$): Suponha que S é aberto e fechado em X . Queremos mostrar que χ_S é contínua. Ou seja, queremos mostrar que $\chi_S^{-1}(A)$ é aberto em X para todo subconjunto A aberto em Y . Vamos examinar cada um dos casos:

- Se $A = \emptyset$, então $\chi_S^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
- Se $A = \{0\}$, então $\chi_S^{-1}(\{0\}) = X \setminus S$.
- Se $A = \{1\}$, então $\chi_S^{-1}(\{1\}) = S$.
- Se $A = Y$, então $\chi_S^{-1}(Y) = \{x \in X \mid \chi_S(x) = 1 \text{ ou } \chi_S(x) = 0\} = X$.

Em todos os casos, a pré-imagem de um aberto por χ_S é aberta. Portanto, χ_S é contínua. $\square$

Exercício 6.4. Seja X um espaço topológico, considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual, e seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que, se existir um subconjunto Y de X tal que $\overline{Y} = X$ e $f(y) = 0$ para todo $y \in Y$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in X$.

6.2. Funções abertas, fechadas e homeomorfismos. Uma função contínua e bi-jetora entre espaços topológicos não é necessariamente um “isomorfismo” de espaços topológicos: a inversa pode não ser contínua. Para que duas topologias sejam essencialmente a mesma, precisamos de uma bijeção que preserve a estrutura em ambas as direções. Essa noção é capturada pela definição de homeomorfismo. Ao lado dela, introduziremos as funções abertas e fechadas, que preservam a estrutura topológica apenas em uma direção e que, como veremos, fornecem critérios alternativos para reconhecer homeomorfismos.

Definição 6.7 (de função aberta, fechada e homeomorfismo). Dados dois espaços topológicos, X e Y , uma função $f : X \rightarrow Y$ entre eles é dita: **aberta**, quando, para todo subconjunto aberto $A \subseteq X$, o subconjunto $f(A)$ é aberto em Y ; **fechada**, quando, para todo subconjunto fechado $Z \subseteq X$, o subconjunto $f(Z)$ é fechado em Y ; e um **homeomorfismo**, quando f é contínua, bijetora e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua. Além disso, quando existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, dizemos que X e Y são **homeomorfos**.

Os exemplos a seguir ilustram cada uma dessas situações na reta real munida da sua topologia usual. Começamos com um homeomorfismo simples.

Exemplo 6.8. Considere $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ é um homeomorfismo: f é contínua (como toda função polinomial), bijetora, e sua inversa, $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$, também é contínua. Além disso, f também é aberta e fechada (ver Proposição 6.13).

O exemplo anterior é um homeomorfismo e, em particular, é simultaneamente aberta e fechada. Os dois exemplos a seguir mostram que existem funções abertas que não são fechadas e funções fechadas que não são abertas.

Exemplo 6.9. Considere $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = e^x$ é aberta, mas não é fechada. De fato, g é aberta, porque $g(a, b) = (e^a, e^b)$ para todo intervalo aberto (a, b) em $\mathbb{R}$. Por outro lado, g não é fechada, porque $\mathbb{R}$ é fechado em $\mathbb{R}$, mas $g(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ não é. Em particular, g não é um homeomorfismo, pois não é sobrejetora.

Exemplo 6.10. Considere $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. A função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2$ é fechada, mas não é aberta. De fato, h não é aberta, porque o conjunto $(-1, 1)$ é aberto em $\mathbb{R}$, mas $h(-1, 1) = [0, 1)$ não é. Além disso, h não é um homeomorfismo, pois h não é nem injetora ($h(-1) = h(1) = 1$), nem sobrejetora ($h(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

Para verificar que h realmente é fechada, considere um subconjunto fechado $Z \subseteq \mathbb{R}$ e uma sequência convergente $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $h(Z)$. Queremos mostrar que o limite dessa sequência também pertence a $h(Z)$. Para isso, comece denotando esse limite por $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =: y$. Depois, observe que, como $y_n \in h(Z)$, então existe $x_n \in Z$ tal que $x_n^2 = y_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se $y > 0$, as sequências $\{\sqrt{y_n}\}$ e $\{-\sqrt{y_n}\}$ são limitadas, logo têm subsequências convergentes; qualquer valor de acumulação x satisfaz $x^2 = y$ e, como Z é fechado, $x \in Z$, de modo que $y \in h(Z)$. Se $y = 0$, então $x_n \rightarrow 0 \in Z$ (pois $x_n^2 \rightarrow 0$ implica $x_n \rightarrow 0$), logo $0 \in h(Z)$.

O exemplo a seguir mostra que uma bijeção contínua não precisa ser um homeomorfismo, e ilustra como a abertura ou fechamento de uma função são propriedades distintas da continuidade.

Exemplo 6.11. Considere $X = \mathbb{R}$ munida da topologia usual e $Y = \mathbb{R}$ munida da topologia cofinita. A função identidade, $i : X \rightarrow Y$, dada por $i(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua e bijetora, mas não é um homeomorfismo. Vamos justificar cada uma dessas afirmações.

Para ver que i é contínua, comece observando que

$$i^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid i(x) \in A\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A\} = A,$$

para todo subconjunto A de $\mathbb{R}$. Como a topologia cofinita é mais grossa que a topologia usual, isso implica que, quando A é aberto em relação à topologia cofinita, sua imagem inversa é aberta em relação à topologia usual. Isso mostra que i é contínua.

Como i é a função identidade, é claro que ela é bijetora. Além disso, sua inversa, $i^{-1} : Y \rightarrow X$, também é dada por $i^{-1}(y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Para ver que i^{-1} não é contínua, basta observar que o intervalo $(0, 1)$ é aberto em relação a topologia usual, mas sua imagem inversa por i^{-1} (que também é igual a $(0, 1)$) não é aberto em relação à topologia cofinita (porque seu complementar não é finito).

Para concluir essa série de exemplos, vamos apresentar um caso de dois espaços que parecem muito diferentes (um intervalo limitado e toda a reta) mas são homeomorfos.

Exemplo 6.12. Considere $\mathbb{R}$ munida da topologia usual e o intervalo $(-1, 1)$ munido da sua topologia usual também. A função

$$k : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{dada por} \quad k(x) = \frac{x}{1 - x^2},$$

é um homeomorfismo. De fato, k é contínua, porque é um quociente de funções contínuas, com o denominador não nulo em $(-1, 1)$. Além disso, k é bijetora. Sua função inversa $k^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, é dada explicitamente por

$$k^{-1}(y) = \frac{2y}{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}.$$

Observe que k^{-1} também é contínua, pois é composta de operações contínuas (multiplicação por escalar, adição, raiz quadrada de $1 + 4y^2 > 0$) com denominador sempre positivo. Isso mostra que $(-1, 1)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Os exemplos acima motivam um critério prático para reconhecer homeomorfismos: é suficiente pedir que a função seja contínua, bijetora e aberta (ou contínua, bijetora e fechada). A proposição a seguir torna esse critério preciso.

Proposição 6.13. Sejam X, Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) f é um homeomorfismo.
- (b) f é contínua, bijetora e aberta.
- (c) f é contínua, bijetora e fechada.

Demonstração. Vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Suponha que f é um homeomorfismo. Isso significa que f é contínua, bijetora, e que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é contínua. Essa última condição significa que, para

todo aberto $U \subseteq X$, a imagem inversa, $(f^{-1})^{-1}(U)$ é aberta em Y . Como f e f^{-1} são bijetoras, então

$$(f^{-1})^{-1}(U) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \in U\} = \{y \in Y \mid y \in f(U)\} = f(U).$$

Isso implica que f é aberta.

(b) $\Rightarrow$ (c): Suponha que f é contínua, bijetora e aberta. Queremos mostrar que f também é fechada. Para isso, seja Z um subconjunto fechado de X . Como Z é fechado, então $X \setminus Z$ é aberto; e como f é aberta, então $f(X \setminus Z)$ é também aberto. Além disso, como f é bijetora, então $f(X \setminus Z) = Y \setminus f(Z)$. Como $f(X \setminus Z)$ é aberto, isso implica que $f(Z)$ é fechado.

(c) $\Rightarrow$ (a): Suponha que f é contínua, bijetora e fechada. Queremos mostrar que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é contínua. Pelo Lema 6.5, basta mostrar que a preimagem de todo fechado de X por f^{-1} é fechada em Y . Para mostrar isso, seja Z um subconjunto fechado de X . Como f e f^{-1} são bijetoras, então $(f^{-1})^{-1}(Z) = f(Z)$; e como f é fechada (por hipótese), então $f(Z)$ é fechado. Isso implica que $(f^{-1})^{-1}(Z)$ é fechado e, consequentemente, que f^{-1} é contínua. $\square$

A proposição acima mostra que homeomorfismos são como isomorfismos entre espaços topológicos. Isso sugere que ser homeomorfo induz uma relação de equivalência entre espaços topológicos. O próximo lema formaliza isso.

Lema 6.14. A relação $\cong$, definida entre espaços topológicos por

$$X \cong Y \quad \text{quando} \quad X \text{ é homeomorfo a } Y,$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração. Precisamos mostrar que $\cong$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Primeiro, vamos mostrar que $\cong$ é reflexiva, ou seja, que $X \cong X$ para todo espaço topológico X . Para isso, basta lembrar que a função identidade $\text{id}_X : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo (ver Exemplo 6.2) para todo espaço topológico X . Logo $X \cong X$.

Agora, vamos mostrar que $\cong$ é simétrica, ou seja, que se $X \cong Y$, então $Y \cong X$. Para isso, suponha que $X \cong Y$, ou seja, que exista um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$. Por definição, isso significa que h é bijetora e sua inversa, $h^{-1} : Y \rightarrow X$, é contínua. Agora observe que a inversa de h^{-1} é $(h^{-1})^{-1} = h$. Isso implica que h^{-1} também é bijetora e sua inversa também é contínua, ou seja, que $h^{-1} : Y \rightarrow X$ é um homeomorfismo. Isso significa que $Y \cong X$.

Agora, vamos mostrar que $\cong$ é transitiva, ou seja, que se $X \cong Y$ e $Y \cong Z$, então $X \cong Z$. Para isso suponha que $X \cong Y$ e $Y \cong Z$, ou seja, que existem homeomorfismos $h_1 : X \rightarrow Y$ e $h_2 : Y \rightarrow Z$. Vamos mostrar que $h_2 \circ h_1 : X \rightarrow Z$ também é um homeomorfismo. Para isso, comece lembrando que, como h_1 e h_2 são contínuas, então $h_2 \circ h_1$ é contínua (ver Exemplo 6.4). Depois, observe que, como h_1 e h_2 são bijetoras, então $h_2 \circ h_1$ também é bijetora. De fato, sua inversa é dada explicitamente por $(h_2 \circ h_1)^{-1} = h_1^{-1} \circ h_2^{-1}$. Para completar, observe que, como h_1 e h_2 são homeomorfismos, então h_1^{-1} e h_2^{-1} são contínuas e, consequentemente,

$h_1^{-1} \circ h_2^{-1}$ também é contínua (ver Exemplo 6.4). Isso mostra que $h_2 \circ h_1 : X \rightarrow Z$ é um homeomorfismo, e portanto, que $X \cong Z$. $\square$

Como a relação de homeomorfismo é uma equivalência, podemos pensar nos espaços topológicos como organizados em classes de equivalência, as chamadas *classes de homeomorfismo*. Dois espaços na mesma classe são topologicamente indistinguíveis.

Vamos concluir essa aula com um exercício que garante que todo intervalo aberto da reta é homeomorfo a $\mathbb{R}$ e outro que nos dá ferramentas para construir funções contínuas a partir de outras funções contínuas.

Exercício 6.5. Considere $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. Mostre que quaisquer dois intervalos abertos de $\mathbb{R}$ são homeomorfos a $\mathbb{R}$.

Resolução (Celso). Verificaremos que

- (a) $(0, 1) \cong (a, b)$ para todo $a < b \in \mathbb{R}$,
- (b) $(a, b) \cong \mathbb{R}$ para todo $a < b \in \mathbb{R}$,
- (c) $(a, \infty) \cong \mathbb{R}$ e
- (d) $(-\infty, a) \cong \mathbb{R}$.

Dessa forma, como “ser homeomorfo” é uma relação de equivalência (ver Lema 6.14), concluímos que quaisquer dois intervalos abertos da reta são homeomorfos entre si e homeomorfos à própria reta.

- (a) Sejam $a < b \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $(0, 1) \cong (a, b)$, vamos verificar que a função $h_1 : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ definida por $h_1(x) = a + (b - a)x$ é um homeomorfismo. Temos que h_1 é contínua por ser polinomial. Além disso, temos que h_1 é bijetora, porque sua inversa $h_1^{-1} : (a, b) \rightarrow (0, 1)$ é dada por $h_1^{-1}(y) = \frac{1}{b-a}(y - a)$. Por último, temos que a inversa h_1^{-1} é contínua por também ser polinomial.
- (b) Para mostrar que $(a, b) \cong \mathbb{R}$, lembre da parte (a) que $(a, b) \cong (0, 1)$ e que $(0, 1) \cong (-1, 1)$. Depois, lembre do Exemplo 6.12 que $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$. Pela transitividade da relação $\cong$, obtemos que $(a, b) \cong \mathbb{R}$.
- (c) Seja $a \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $(a, \infty) \cong \mathbb{R}$, vamos verificar que a função

$$h_2 : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad h_2(x) = \ln(x - a)$$

é um homeomorfismo. Com efeito, temos que h_2 é contínua por ser uma composição de duas funções contínuas (uma função logarítmica e uma função polinomial). Além disso, temos que h_2 é bijetora, porque sua inversa $h_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (a, \infty)$ é dada por $h_2^{-1}(y) = e^y + a$. Por último, temos que h_2^{-1} é uma função contínua por ser uma soma de funções contínuas (uma função exponencial e uma função constante).

- (d) Seja $a \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $(-\infty, a) \cong \mathbb{R}$, vamos verificar que a função $h_3 : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h_3(x) = \ln(a - x)$ é um homeomorfismo. De fato, temos que h_3 é contínua por ser uma composição de duas funções contínuas

(uma função logarítmica e uma função polinomial). Além disso, temos que h_3 é bijetora, porque sua inversa $h_3^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, a)$ é dada por $h_3^{-1}(y) = a - e^y$. Por último, temos que h_3^{-1} é uma função contínua por ser uma soma de funções contínuas (uma função exponencial e uma função constante). $\square$

Exercício 6.6. Seja X um espaço topológico, considere $\mathbb{R}$ munido da sua topologia usual, seja $\lambda \in \mathbb{R}$, e sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Mostre que:

- (a) A função $h : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \lambda f(x) + g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua.
- (b) A função $k : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é contínua.

Resolução (Daniel). (a) Uma vez que f é contínua, então, para todo $x \in X$ e $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq V$ (ver Lema 6.5). Em particular, se $V_f = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \in \mathcal{U}_{f(x)}$ para algum $\epsilon > 0$, existe $U_f \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U_f) \subseteq V_f$; ou seja, para todo $y \in U_f$,

$$f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon.$$

Assim, para todo $\lambda \neq 0$, temos que

$$\lambda f(x) - \epsilon' < \lambda f(y) < \lambda f(x) + \epsilon' \quad \text{para } \epsilon' = |\lambda|\epsilon > 0.$$

Note que, de forma semelhante, dado que g é contínua, podemos definir $V_g = (g(x) - \delta, g(x) + \delta) \in \mathcal{U}_{g(x)}$, com $\delta > 0$, para a qual existe $U_g \in \mathcal{U}_x$ tal que $g(U_g) \subseteq V_g$. Depois, para todo $y \in U_g$,

$$g(x) - \delta < g(y) < g(x) + \delta.$$

Porém, repare que, se $y \in U_f \cap U_g \in \mathcal{U}_x$, então

$$(\lambda f(x) - \epsilon') + (g(x) - \delta) < \lambda f(y) + g(x) < (\lambda f(x) + \epsilon') + (g(x) + \delta),$$

de modo que, para todo $\delta' > 0$,

$$h(x) - \delta' < h(y) < h(x) + \delta'.$$

Por fim, sabemos que a família $\mathcal{B} = \{(h(x) - \delta', h(x) + \delta') \mid \delta' > 0\}$ é uma base de vizinhanças de $h(x)$. Assim, para todo $x \in X$ e $V \in \mathcal{U}_{h(x)}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$ e $h(y) \in B$ para todo $y \in U_f \cap U_g$. Ou seja $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq B \subset V$. Por isso $h(x)$ é contínua.

- (b) Uma vez que f é contínua, então, para todo $x \in X$, se definirmos $V_1 = (f(x) - 1, f(x) + 1) \in \mathcal{U}_{f(x)}$, então existe $U_1 \in \mathcal{U}_x$ de tal forma que, para todo $y \in U_1$,

$$f(x) - 1 < f(y) < f(x) + 1 \Rightarrow |f(y) - f(x)| < 1.$$

Conclui-se então que

$$|f(y) - f(x)| < 1 \Rightarrow |f(y)| - |f(x)| \leq ||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - f(x)| < 1,$$

de modo que, para todo $y \in U_1$,

$$|f(y)| < |f(x)| + 1 = M > 0.$$

Uma vez que g também é contínua, podemos definir $V_2 = (g(x) - \frac{\epsilon}{2M}, g(x) + \frac{\epsilon}{2M})$ com $\epsilon > 0$ de modo a que exista $U_2 \in \mathcal{U}_x$ tal que, para tudo $y \in U_2$,

$$g(x) - \frac{\epsilon}{2M} < g(y) < g(x) + \frac{\epsilon}{2M} \Rightarrow |g(y) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Da mesma forma que nos dois processos anteriores, podemos definir que, existe $U_3 \in \mathcal{U}$ tal que para tudo $y \in U_3$

$$|g(y)| < |g(x)| + 1 = N > 0 \quad e \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2N}.$$

Assim, para todo $y \in U_1 \cap U_2 \cap U_3 \in \mathcal{U}_x$ temos que

$$\begin{aligned} |f(y)g(y) - f(x)g(x)| &= |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)| \\ &= |f(y)(g(y) - g(x)) + g(x)(f(y) - f(x))| \\ &\leq |f(y)||g(y) - g(x)| + |g(x)||f(y) - f(x)| \\ &< M \frac{\epsilon}{2M} + N \frac{\epsilon}{2N} = \epsilon. \end{aligned}$$

Desta forma, deduz-se que

$$f(x)g(x) - \epsilon < f(y)g(y) < f(x)g(x) + \epsilon \Rightarrow k(x) - \epsilon < k(y) < k(x) + \epsilon.$$

Por fim, sabemos que a família $\mathcal{B}' = \{(k(x) - \delta', k(x) + \delta') | \delta' > 0\}$ é uma base de vizinhanças de $k(x)$. Assim, para todo $x \in X$ e $V \in \mathcal{U}_{k(x)}$, existe $B \in \mathcal{B}'$ tal que $B \subseteq V$ e $k(y) \in B$ para todo $y \in U \in \mathcal{U}_x$. Ou seja $f(U) \subseteq B \subset V$. $\square$

AULA 7

Nesta aula, estudaremos a construção de novos espaços topológicos a partir de espaços já conhecidos, por meio da chamada *topologia induzida*. Depois de introduzir e exemplificar essa construção, estudaremos como ela interage com vizinhanças, bases e, por fim, veremos como funções contínuas se comportam sob restrição a subespaços e como funções contínuas definidas em partes podem ser coladas para formar uma função contínua global.

7.1. Subespaços topológicos. Nesta primeira parte da aula, introduziremos o conceito de subespaço topológico. Em seguida, ilustraremos essa construção com exemplos nas topologias trivial, discreta e usual de $\mathbb{R}$. Vamos começar com um resultado que nos permite definir a chamada topologia induzida.

Lema 7.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Para todo subconjunto $Y \subseteq X$, a família $\tau_Y := \{Y \cap A \mid A \in \tau\}$ é uma topologia em Y .

Demonstração. Vamos provar que τ_Y satisfaz as condições (i)–(iii) da Definição 1.1.

- (i) Como $\emptyset \in \tau$, então $\emptyset = Y \cap \emptyset \in \tau_Y$. Como $X \in \tau$, então $Y = Y \cap X \in \tau_Y$.
- (ii) Seja $\{B_i\}_{i \in I}$ uma subfamília de τ_Y . Por definição, para cada $i \in I$, existe $A_i \in \tau$ tal que $B_i = Y \cap A_i$. Assim,

$$\bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (Y \cap A_i) = Y \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right).$$

Como τ é uma topologia em X , então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$, e portanto $\bigcup_{i \in I} B_i \in \tau_Y$.

- (iii) Sejam $B_1, \dots, B_n \in \tau_Y$. Por definição, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $A_i \in \tau$ tal que $B_i = Y \cap A_i$. Assim,

$$B_1 \cap \dots \cap B_n = (Y \cap A_1) \cap \dots \cap (Y \cap A_n) = Y \cap (A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

Como τ é uma topologia em X , então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$. Daí, concluímos que $B_1 \cap \dots \cap B_n \in \tau_Y$. $\square$

O lema anterior garante que a família τ_Y é sempre uma topologia em Y , o que justifica a definição a seguir.

Definição 7.2 (de subespaço topológico). Dado um espaço topológico (X, τ) , um **subespaço topológico** de X é um subconjunto $Y \subseteq X$ munido da **topologia induzida** $\tau_Y := \{A \cap Y \mid A \in \tau\}$.

Nos três exemplos a seguir, identificaremos os subespaços topológicos em três casos simples. Começaremos pelos casos extremos, a topologia trivial e a topologia discreta, e passaremos em seguida ao exemplo mais geométrico da reta real com a sua topologia usual.

Exemplo 7.3. Seja X um conjunto munido da topologia trivial, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Para todo subconjunto $Y \subseteq X$, a topologia induzida é

$$\tau_Y = \{Y \cap \emptyset, Y \cap X\} = \{\emptyset, Y\},$$

que é a topologia trivial em Y . Portanto, todo subespaço topológico de um espaço topológico munido da topologia trivial também é um espaço topológico munido da topologia trivial.

De maneira análoga, qualquer subespaço de um espaço discreto herda a topologia discreta.

Exemplo 7.4. Seja X um conjunto munido da topologia discreta, $\tau = \mathcal{P}(X)$. Para todo subconjunto $Y \subseteq X$, a topologia induzida é

$$\tau_Y = \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{P}(X)\} = \mathcal{P}(Y),$$

pois para qualquer $B \subseteq Y$ basta tomar $A = B \in \mathcal{P}(X)$. Portanto, todo subespaço topológico munido da topologia discreta também é um espaço topológico munido da topologia discreta.

O próximo exemplo ilustra um caso mais sutil: na reta real com a topologia usual, a topologia induzida sobre um intervalo pode tornar abertos conjuntos que não são abertos em $\mathbb{R}$.

Exemplo 7.5. Considere $X = \mathbb{R}$ munido da sua topologia usual. Se nós considerarmos $S = [-1, 1]$ munido da topologia induzida, o intervalo $(-1, 1)$ é aberto em S , pois $(-1, 1) = S \cap (-1, 1)$. No entanto, o intervalo $[-1, 1] = S$ também é aberto em S , mesmo sem ser aberto em $\mathbb{R}$, e o intervalo $(0, 1]$ também é aberto em S , mesmo sem ser aberto em $\mathbb{R}$.

O exercício a seguir generaliza o exemplo anterior.

Exercício 7.1. Seja (X, d) um espaço métrico e denote por τ a topologia em X induzida pela métrica d .

- Dado um subconjunto $Y \subseteq X$, mostre que a topologia induzida τ_Y coincide com a topologia induzida pela métrica restrita $d_Y := d|_{Y \times Y}$.
- Considere $X = \mathbb{R}$ munido da topologia usual τ (induzida pela métrica usual). Considere também $X' = \mathbb{R}$ munido da topologia discreta τ' (induzida pela métrica discreta). Mostre que $X \subseteq X'$ e $\tau \subseteq \tau'$, mas que (X, τ) não é um subespaço topológico de (X', τ') .
- Mostre que $\mathbb{Z}$ munido da topologia discreta é um subespaço topológico de $\mathbb{R}$ munido da topologia usual.

Resolução (Israel). (a) Comece lembrando que a topologia usual da reta é definida como sendo

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \text{para todo } x \in U, \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_d(x, \varepsilon) \subseteq U\}.$$

Lembre também que a topologia induzida por τ em Y é definida por

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}.$$

Depois, lembre que a métrica d restrita a Y é definida por

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2), \quad \text{para todo } y_1, y_2 \in Y,$$

e que a topologia induzida em Y pela métrica d_Y é definida por

$$\tau_{d_Y} = \{V \subseteq Y \mid \text{para todo } y \in V, \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_{d_Y}(y, \varepsilon) \subseteq V\}.$$

Agora vamos mostrar que $\tau_Y = \tau_{d_Y}$. Para isso, vamos provar duas inclusões:

- $\tau_Y \subseteq \tau_{d_Y}$: Para mostrar que $\tau_Y \subseteq \tau_{d_Y}$, vamos verificar que, para todo $A \in \tau_Y$ e todo $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d_Y}(a, \varepsilon) \subseteq A$. Assim, fixe $A \in \tau_Y$ e $a \in A$. Pela definição de τ_Y , existe $\tilde{A} \in \tau$ tal que $A = Y \cap \tilde{A}$. Como $a \in A = Y \cap \tilde{A} \subseteq \tilde{A}$ e $\tilde{A} \in \tau$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(a, \varepsilon) \subseteq \tilde{A}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} B_{d_Y}(a, \varepsilon) &= \{y \in Y \mid d_Y(a, y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in Y \mid d(a, y) < \varepsilon\} \\ &= B_d(a, \varepsilon) \cap Y \\ &\subseteq \tilde{A} \cap Y \\ &= A. \end{aligned}$$

Logo, para todo $A \in \tau_Y$ e todo $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d_Y}(a, \varepsilon) \subseteq A$: ou seja, A é aberto em relação à topologia τ_{d_Y} . Isso implica que $\tau_Y \subseteq \tau_{d_Y}$.

- $\tau_{d_Y} \subseteq \tau_Y$: Para mostrar que $\tau_{d_Y} \subseteq \tau_Y$, vamos verificar que, para todo $A \in \tau_{d_Y}$, existe $U \in \tau$ tal que $A = Y \cap U$. Para isso, fixe $A \in \tau_{d_Y}$. Por definição, para cada $a \in A$, existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B_{d_Y}(a, \varepsilon_a) \subseteq A$. Vamos checar que o conjunto $U = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon_a)$ pertence a τ e $A = Y \cap U$. O fato de A pertencer a τ segue direto da definição de τ : para todo $a \in U$, a bola aberta $B_d(a, \varepsilon_a)$ está contida em U . Agora, para verificar que $Y \cap U = A$, observe que

$$\begin{aligned} Y \cap U &= Y \cap \left(\bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon_a) \right) \\ &= \bigcup_{a \in A} (Y \cap B_d(a, \varepsilon_a)) \\ &= \bigcup_{a \in A} B_{d_Y}(a, \varepsilon_a) \\ &= A. \end{aligned}$$

Portanto, $A = Y \cap U$ com $U \in \tau$, ou seja, $A \in \tau_Y$. Isso implica que $\tau_{d_Y} \subseteq \tau_Y$.

Como $\tau_Y \subseteq \tau_{d_Y}$ e $\tau_{d_Y} \subseteq \tau_Y$, então $\tau_Y = \tau_{d_Y}$.

- (b) Como $X = X' = \mathbb{R}$, então $X \subseteq X'$. Além disso, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X) = \tau'$. Agora vamos mostrar que (X, τ) não é um subespaço topológico de (X', τ') .

Para que (X, τ) fosse um subespaço topológico de (X', τ') , precisaríamos que:

$$\tau = \{X \cap A \mid A \in \tau'\}.$$

Como $\tau' = \mathcal{P}(X)$, isso implicaria que

$$\begin{aligned} \tau &= \{X \cap A \mid A \in \tau'\} \\ &= \{X \cap A \mid A \in \mathcal{P}(X)\} \\ &= \{A \mid A \in \mathcal{P}(X)\} \\ &= \mathcal{P}(X); \end{aligned}$$

ou seja, τ deveria ser a topologia discreta. Como a topologia usual não é igual à topologia discreta em $\mathbb{R}$, concluímos que (X, τ) não é um subespaço topológico de (X', τ') .

- (c) Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual, τ . A topologia induzida no subconjunto $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ é

$$\tau_{\mathbb{Z}} = \{\mathbb{Z} \cap A \mid A \in \tau\}.$$

Vamos verificar que todo conjunto formado por um ponto, $\{n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, pertence a $\tau_{\mathbb{Z}}$. Para isso, fixe um ponto $n \in \mathbb{Z}$. Depois, observe que, se $0 < \varepsilon < 1$, então

$$\mathbb{Z} \cap (n - \varepsilon, n + \varepsilon) = \{n\}.$$

Como $(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \in \tau$, isso implica que $\{n\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$. Como todos os conjuntos de 1 elemento pertencem a $\tau_{\mathbb{Z}}$, então todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ também pertence a $\tau_{\mathbb{Z}}$ (porque todo subconjunto é união de subconjuntos com 1 elemento). Isso implica que $\tau_{\mathbb{Z}} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, ou seja, que a topologia induzida em $\mathbb{Z}$ é a topologia discreta. $\square$

Depois de apresentar exemplos que ilustram a definição de subespaço topológico em situações concretas vamos estabelecer propriedades formais fundamentais da topologia induzida: como os abertos e fechados de um subespaço se relacionam com os do espaço, e como o fecho em um subespaço se relaciona com o seu fecho no espaço.

Proposição 7.6. Sejam (X, τ) um espaço topológico e (S, τ_S) um subespaço topológico de X

- (a) Se A é um subconjunto aberto de (S, τ_S) e S é um subconjunto aberto de (X, τ) , então A é um subconjunto aberto de X .
- (b) Um subconjunto $Z \subseteq S$ é fechado em (S, τ_S) se, e somente se, existe um subconjunto fechado $\tilde{Z} \subseteq X$ tal que $Z = S \cap \tilde{Z}$.
- (c) Se Z é um subconjunto fechado de (S, τ_S) e S é um subconjunto fechado de (X, τ) , então Z é um subconjunto fechado de X .
- (d) Dado um subconjunto $Y \subseteq S$, se denotarmos seu fecho em S por $\overline{Y}^S$ e seu fecho em X por $\overline{Y}^X$, então $\overline{Y}^S = S \cap \overline{Y}^X$.

Demonstração. (a) Como $A \in \tau_S$, existe $B \in \tau$ tal que $B \cap S = A$. Como $S \in \tau$, então $A = B \cap S \in \tau$.

- (b) $(\Rightarrow)$: Suponha que Z seja fechado em (S, τ_S) . Isso implica que $S \setminus Z \in \tau_S$. Assim, existe $A \in \tau$ tal que $S \setminus Z = S \cap A$. Como o subconjunto A é aberto em X , então o subconjunto $\tilde{Z} := X \setminus A$ é fechado em X . Além disso,

$$Z = S \setminus (S \setminus Z) = S \setminus (S \cap A) = S \setminus A = S \cap \tilde{Z}.$$

$(\Leftarrow)$: Suponha que $\tilde{Z}$ seja um subconjunto fechado de X e que $Z = S \cap \tilde{Z}$. Então $S \setminus Z = S \setminus (S \cap \tilde{Z}) = S \cap (X \setminus \tilde{Z})$. Como $\tilde{Z}$ é fechado em X , então $X \setminus \tilde{Z} \in \tau$. Daí e da igualdade $S \setminus Z = S \cap (X \setminus \tilde{Z})$, segue que $S \setminus Z \in \tau_S$. Isso implica que Z é fechado em S .

- (c) Como Z é fechado em S , existe um subconjunto $\tilde{Z}$ fechado em X tal que $Z = S \cap \tilde{Z}$ (ver parte (b)). Como S e $\tilde{Z}$ são fechados em X , então $Z = S \cap \tilde{Z}$ também é fechado em X .
- (d) Suponha que Y é um subconjunto de S . Vamos mostrar que $\overline{Y}^S = S \cap \overline{Y}^X$. Para isso, comece denotando por $\mathcal{Z}_Y^X$ a família de subconjuntos fechados de X que contém Y , e por $\mathcal{Z}_Y^S$ a família de subconjuntos fechados de S que contém Y . Pela parte (b), nós temos que um subconjunto Z que contém Y é fechado em S se, e somente se, existe um fechado $\tilde{Z}$ de X tal que $Z = S \cap \tilde{Z}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_Y^S &= \{Z \mid Y \subseteq Z \text{ e } Z \text{ é fechado em } S\} \\ &= \{S \cap \tilde{Z} \mid Y \subseteq (S \cap \tilde{Z}) \text{ e } \tilde{Z} \text{ é fechado em } X\} \\ &= \{S \cap \tilde{Z} \mid Y \subseteq \tilde{Z} \text{ e } \tilde{Z} \text{ é fechado em } X\} \\ &= \{S \cap \tilde{Z} \mid \tilde{Z} \in \mathcal{Z}_Y^X\}. \end{aligned}$$

Isso implica que $\overline{Y}^S = \bigcap_{Z \in \mathcal{Z}_Y^S} Z = \bigcap_{\tilde{Z} \in \mathcal{Z}_Y^X} (S \cap \tilde{Z}) = S \cap \left(\bigcap_{\tilde{Z} \in \mathcal{Z}_Y^X} \tilde{Z} \right) = S \cap \overline{Y}^X$.

□

A proposição acima descreve como abertos, fechados e fechos de um subespaço se relacionam com os do espaço ambiente. O exemplo a seguir ilustra os itens (b) e (d) em $\mathbb{R}$.

Exemplo 7.7. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. Se tomarmos $S = (0, 2)$ munido da sua topologia induzida, o intervalo $(0, 1]$ será fechado em S , mas não será fechado em $\mathbb{R}$. Além disso, observe que o fecho do subconjunto $Y = (0, 1)$ em S ,

$$\overline{Y}^S = S \cap \overline{Y}^{\mathbb{R}} = (0, 2) \cap [0, 1] = (0, 1],$$

difere do seu fecho em $\mathbb{R}$, que é $[0, 1]$. Observe também que S é fechado em S , mas não é fechado em $\mathbb{R}$.

Exercício 7.2. Considere o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ munido da topologia induzida pela a ordem lexicográfica (ver Exercício 3.4).

- (a) Mostre que, para todo subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ a topologia de subespaço induzida em S é a topologia discreta.
- (b) Utilize o resultado do item anterior para mostrar que a hipótese “ S ser um subconjunto aberto de X ” é estritamente necessária na Proposição 7.6(a).

Após estudar como abertos, fechados e fechos de um subespaço se relacionam com os do espaço ambiente, nessa segunda parte da aula, passaremos a estudar como vizinhanças e bases se comportam ao restringir a topologia a um subespaço.

Proposição 7.8. Sejam (X, τ) um espaço topológico e (S, τ_S) um subespaço topológico de X .

- (a) Se $\mathcal{B}$ é uma base da topologia τ , então $\mathcal{B}_S := \{S \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma base da topologia τ_S . Em particular, se (X, τ) é segundo enumerável, então (S, τ_S) também é segundo enumerável.

- (b) Para todo $s \in S$, o sistema de vizinhanças de s em S é dado por

$$\mathcal{U}_{s,S} = \{S \cap U \mid U \in \mathcal{U}_{s,X}\}.$$

- (c) Se $s \in S$ e $\mathcal{B}_s$ for uma base de vizinhanças de s em X , então $\{S \cap B \mid B \in \mathcal{B}_s\}$ é uma base de vizinhanças de s em S . Em particular, se (X, τ) é primeiro enumerável, então (S, τ_S) também é primeiro enumerável.

Demonstração. (a) Suponha que $\mathcal{B}$ é uma base da topologia τ . Vamos usar a Proposição 2.11 para mostrar que $\mathcal{B}_S$ é uma base da topologia τ_S . Para começar, observe que, como todo $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ é aberto em X , então todo $S \cap \tilde{B} \in \mathcal{B}_S$ é aberto em S . Depois, fixe $A \in \tau_S$ e $a \in A$. Queremos mostrar que existe $B \in \mathcal{B}_S$ tal que $a \in B \subseteq A$.

Para isso, comece lembrando que, como $A \in \tau_S$, então existe $\tilde{A} \in \tau$ tal que $A = S \cap \tilde{A}$. Depois, observe que, como $a \in A = S \cap \tilde{A}$, então $a \in \tilde{A}$. Em seguida, lembre que, como $\mathcal{B}$ é uma base de τ , então existe $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ tal que $a \in \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ (ver pelo Lema 4.12(b)). Assim, se tomarmos $B = S \cap \tilde{B} \in \mathcal{B}_S$, teremos que $a \in S \cap \tilde{B} = B$ e $B = S \cap \tilde{B} \subseteq S \cap \tilde{A} = A$, como queríamos.

- (b) Fixe $s \in S$. Para mostrar que $\mathcal{U}_{s,S} = \{S \cap U \mid U \in \mathcal{U}_{s,X}\}$, vamos mostrar que $\mathcal{U}_{s,S} \subseteq \{S \cap U \mid U \in \mathcal{U}_{s,X}\}$ e que $\{S \cap U \mid U \in \mathcal{U}_{s,X}\} \subseteq \mathcal{U}_{s,S}$.

Para mostrar que $\mathcal{U}_{s,S} \subseteq \{S \cap U \mid U \in \mathcal{U}_{s,X}\}$, comece lembrando a definição de sistema de vizinhanças (Definição 4.1):

$$\mathcal{U}_{s,S} = \{Y \subseteq S \mid \text{existe } A \in \tau_S \text{ tal que } s \in A \subseteq Y\}.$$

Agora, fixe $Y \in \mathcal{U}_{s,S}$. Vamos mostrar que $Y = S \cap U$ para algum $U \in \mathcal{U}_{s,X}$. Para isso, fixe um aberto $A \in \tau_S$ tal que $s \in A \subseteq Y$. Pela definição da topologia induzida, existe $\tilde{A} \in \tau$ tal que $A = S \cap \tilde{A}$ (ver Definição 7.2). Assim, se tomarmos $U := Y \cup \tilde{A}$, teremos que $s \in A \subseteq \tilde{A} \subseteq Y \cup \tilde{A} = U$. Isso significa que $U \in \mathcal{U}_{s,X}$. Além disso, observe que

$$S \cap U = S \cap (Y \cup \tilde{A}) = (S \cap Y) \cup (S \cap \tilde{A}) = Y \cup A = Y.$$

Isso mostra que, para todo $Y \in \mathcal{U}_{s,S}$, existe $U \in \mathcal{U}_{s,X}$ tal que $Y = S \cap U$.

Para mostrar que $\{S \cap U \mid U \in \mathcal{U}_{s,X}\} \subseteq \mathcal{U}_{s,S}$, comece lembrando a definição de sistema de vizinhanças (Definição 4.1):

$$\mathcal{U}_{s,X} = \{U \subseteq X \mid \text{existe } A \in \tau \text{ tal que } s \in A \subseteq U\}.$$

Como $s \in S$ (por hipótese), segue daí que, para todo $U \in \mathcal{U}_{s,X}$, existe $A \in \tau$ tal que $s \in (S \cap A) \subseteq (S \cap U)$. Daí e da definição de topologia induzida, vemos que: para todo $U \in \mathcal{U}_{s,X}$, existe $A' \in \tau_S$ tal que $s \in A' \subseteq (S \cap U)$. Isso significa que $S \cap U \in \mathcal{U}_{s,S}$ para todo $U \in \mathcal{U}_{s,X}$, ou seja, que $\{S \cap U \mid U \in \mathcal{U}_{s,X}\} \subseteq \mathcal{U}_{s,S}$.

- (c) Fixe $s \in S$ e uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_s$ de s em (X, τ) . Para mostrar que $\{S \cap B \mid B \in \mathcal{B}_s\}$ é uma base de vizinhanças de s em (S, τ_S) , usaremos a parte (b). De fato, para toda $V \in \mathcal{U}_{s,S}$, existe $U \in \mathcal{U}_{s,X}$ tal que $V = S \cap U$. Como $\mathcal{B}_s$ é base de vizinhanças de s em (X, τ) , então existe $B \in \mathcal{B}_s$ tal que $s \in B \subseteq U$. Assim, temos que, para toda $V \in \mathcal{U}_{s,S}$, existe $B \in \mathcal{B}_s$ tal que $s \in (S \cap B) \subseteq V$. Isso mostra que $\{S \cap B \mid B \in \mathcal{B}_s\}$ é uma base de vizinhanças de s em S . $\square$

Os itens da proposição acima têm consequências imediatas. O item (a) mostra que subespaços de espaços segundo enumeráveis são segundo enumeráveis; em particular, todo subespaço de $\mathbb{R}^n$ é segundo enumerável. O item (c) garante o mesmo para o primeiro axioma de enumerabilidade. O exemplo a seguir ilustra o item (b).

Exemplo 7.9. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual e $S = [0, 1]$ munido da topologia induzida. Fixe o ponto $s = 0 \in S$. Lembre que uma base de vizinhanças de 0 em $\mathbb{R}$ é dada pelos intervalos abertos $(-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$. Assim, pela Proposição 7.8(b), uma base de vizinhanças de 0 em S é dada pelos conjuntos $S \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = [0, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$.

Exercício 7.3. Considere $X = \mathbb{R}^2$ munido da topologia usual τ e $X' = \mathbb{R}$ munido da topologia cofinita τ' .

- (a) Mostre que (X', τ') não é um subespaço topológico de (X, τ) .
 (b) Mostre que, para toda topologia em $\mathbb{R}^2$ tal que (X', τ') é um subespaço topológico, o espaço topológico $\mathbb{R}^2$ não será primeiro enumerável.

Resolução (Roger). (a) Para mostrar que (X', τ') não é um subespaço topológico de (X, τ) , vamos mostrar que a topologia cofinita em $X' = \mathbb{R}$ não é igual à topologia induzida pela topologia usual de $X = \mathbb{R}^2$. Para isso, comece identificando $\mathbb{R}$ com o subconjunto $Y := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. A topologia cofinita em Y é aquela cujos abertos são o conjunto vazio e os conjuntos cujo complementar em Y é finito.

Agora vamos construir um subconjunto que é aberto em relação à topologia induzida, $\tau_Y = \{A \cap Y \mid A \text{ aberto em } \mathbb{R}^2\}$, mas não é aberto em relação à topologia cofinita de Y . Para isso, considere a bola $A = B((0, 0), 1)$, aberta em relação à topologia usual de $\mathbb{R}^2$, e observe que

$$A \cap Y = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}.$$

Como esse subconjunto não é vazio e não tem complementar finito em Y , então ele não é aberto em relação à topologia cofinita de Y . Isso mostra que existe um conjunto aberto em relação à topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$ que não é aberto em relação à topologia cofinita. Logo, essas duas topologias não podem ser iguais.

- (b) Suponha que τ seja uma topologia em $\mathbb{R}^2$ tal que a topologia induzida $\tau_{\mathbb{R}}$ é igual à topologia cofinita em $\mathbb{R}$. Pela Proposição 7.8(c), se $(\mathbb{R}^2, \tau)$ fosse primeiro enumerável, então $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ também seria primeiro enumerável. Como a topologia cofinita em $\mathbb{R}$ não é primeiro enumerável (ver Exercício 4.1), então $(\mathbb{R}^2, \tau)$ também não pode ser primeiro enumerável. $\square$

Até aqui, estudamos a topologia induzida em termos de abertos, fechados, fechos e vizinhanças. Na parte final dessa aula, vamos mostrar como funções contínuas se comportam em relação a subespaços. A proposição a seguir mostra que funções contínuas se restringem a funções contínuas em subespaços, e que funções contínuas definidas em partes podem ser coladas para dar origem a uma função contínua global.

Proposição 7.10. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

- (a) Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e S é um subespaço topológico de X , então a restrição $f|_S : S \rightarrow Y$ é contínua.
- (b) Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de abertos de X tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Se todas as restrições $f|_{A_i} : A_i \rightarrow Y$ forem contínuas, então $f : X \rightarrow Y$ também é contínua.
- (c) Sejam A_1, A_2 dois abertos de X tais que $X = A_1 \cup A_2$. Se $f_1 : A_1 \rightarrow Y$ e $f_2 : A_2 \rightarrow Y$ são funções contínuas tais que $f_1|_{A_1 \cap A_2} = f_2|_{A_1 \cap A_2}$, então a função $g : X \rightarrow Y$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } x \in A_1, \\ f_2(x), & \text{se } x \in A_2, \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. (a) Suponha que $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e que S é um subespaço topológico de X . Queremos mostrar que, para todo subconjunto aberto $V \subseteq Y$, a imagem inversa $f|_S^{-1}(V)$ é aberta em S . Para isso, comece observando que

$$\begin{aligned} f|_S^{-1}(V) &= \{s \in S \mid f|_S(s) \in V\} \\ &= \{s \in S \mid f(s) \in V\} \\ &= \{s \in X \mid s \in S \text{ e } f(s) \in V\} \\ &= S \cap f^{-1}(V), \end{aligned}$$

para todo subconjunto $V \subseteq Y$. Em particular, quando V é aberto em Y , como f é contínua, temos que $f^{-1}(V)$ é aberto em X . Assim, pela definição da topologia induzida, temos que, se V for aberto em Y , então $f|_S^{-1}(V) = S \cap f^{-1}(V)$ é aberto em S (ver Definição 7.2). Isso mostra que $f|_S$ é contínua.

- (b) Queremos mostrar que $f : X \rightarrow Y$ é contínua, ou seja, que, se V for um subconjunto aberto de Y , então $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X . Para isso, comece observando que

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (f^{-1}(V) \cap A_i),$$

para todo subconjunto V de Y . Depois, lembre que $f^{-1}(V) \cap A_i = f|_{A_i}^{-1}(V)$ para todo $i \in I$ e todo $V \subseteq Y$ (ver parte (a)). Em particular, quando V é aberto em Y , como as restrições $f|_{A_i}$ são contínuas, temos que $f|_{A_i}^{-1}(V)$ são abertos em A_i . Além disso, como cada A_i é aberto em X , obtemos que $f|_{A_i}^{-1}(V)$ é aberto em X (pela Proposição 7.6(a)) para todo $i \in I$. Isso mostra que, se V é aberto em Y , então $f^{-1}(V)$ é uma união de abertos de X e, consequentemente, também é aberto em X .

- (c) Para mostrar que g é contínua, vamos mostrar que, se A é aberto em Y , então $g^{-1}(A)$ é aberto em X (compare com o Lema 6.5). Para isso, comece fixando um subconjunto aberto $A \subseteq Y$ e observando que

$$\begin{aligned} g^{-1}(A) &= X \cap g^{-1}(A) \\ &= (A_1 \cup A_2) \cap g^{-1}(A) \\ &= (A_1 \cap g^{-1}(A)) \cup (A_2 \cap g^{-1}(A)) \\ &= f_1^{-1}(A) \cup f_2^{-1}(A). \end{aligned}$$

Como A é aberto em Y e f_1 e f_2 são contínuas, temos que $f_1^{-1}(A)$ é aberto em A_1 e $f_2^{-1}(A)$ é aberto em A_2 . Além disso, como A_1 e A_2 são abertos em X , segue daí e da Proposição 7.6(a) que $f_1^{-1}(A)$ e $f_2^{-1}(A)$ são abertos em X . Isso implica que $g^{-1}(A) = f_1^{-1}(A) \cup f_2^{-1}(A)$ é aberto em X , e conclui a demonstração de que g é contínua. $\square$

Observe que o item (c) da proposição acima requer que Z_1 e Z_2 sejam fechados em X . O exemplo a seguir mostra que essa hipótese é essencial: se um dos conjuntos não for fechado, a função definida por partes pode não ser contínua, mesmo que cada pedaço o seja.

Exemplo 7.11. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. Tome $Z_1 = (-\infty, 0]$ e $Z_2 = (0, \infty)$, defina $f_1 : Z_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_1(x) = 1$ e $f_2 : Z_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_2(x) = 2$. Embora f_1 e f_2 sejam ambas contínuas, a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0, \\ 2, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

não é contínua em 0. De fato, o aberto $V = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ contém $g(0) = 1$, mas sua imagem inversa, $g^{-1}(V) = (-\infty, 0]$, não é aberta em $\mathbb{R}$. Note que Z_1 é fechado, mas $Z_2 = (0, \infty)$ não é, o que viola a hipótese do item (c).

Exercício 7.4. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

- (a) Mostre que, se para todo $x \in X$, existe um aberto U_x tal que $x \in U_x$ e $f|_{U_x}$ é contínua, então f é contínua.
- (b) Dê um exemplo que mostre que o item (b) da Proposição 7.10 pode falhar se a cobertura $\{A_i\}_{i \in I}$ for por fechados em vez de abertos.
- (c) Mostre que, se existirem subconjuntos fechados $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ de X tais que $X = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n$ e as restrições $f|_{Z_k} : Z_k \rightarrow Y$ são contínuas e concordantes nas interseções, então f é contínua.

Resolução (Zyion). (a) Suponha que, para todo $x \in X$, existe um aberto U_x tal que $x \in U_x$ e tal que a restrição $f|_{U_x}$ é contínua. Considere a família de abertos $\{U_x\}_{x \in X}$. Como $x \in U_x \subseteq X$ para todo $x \in X$, então $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Além disso, como toda restrição $f|_{U_x}$ é contínua, segue da Proposição 7.10(b) que f é contínua.

- (b) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Note que, para cada $n > 0$, o conjunto $Z_n := \mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ é fechado. Além disso, o conjunto $Z_0 := \{0\}$ também é fechado e a família $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ é uma cobertura fechada de $\mathbb{R}$. Além disso, as restrições $f|_{Z_n} : Z_n \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e concordantes. Entretanto, a função f não é contínua.

- (c) Provaremos essa afirmação por indução em n . O caso $n = 1$ é óbvio. (O caso $n = 2$ é análogo à Proposição 7.10(c)). Suponha que $n > 1$ e que a afirmação seja verdadeira para todo $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Vamos verificar que: se $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ forem fechados de X tais que $X = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n$ e $f : X \rightarrow Y$ for uma função tal que as restrições $f|_{Z_k} : Z_k \rightarrow Y$ são contínuas e concordantes nas interseções, então f é contínua.

Para isso, defina $X_1 := Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_{n-1}$ e $X_2 := Z_n$. Pela hipótese de indução, $f|_{X_1}$ e $f|_{X_2}$ são contínuas e concordantes na interseção. Além disso, X_1 e X_2 são subconjuntos fechados de X tais que $X = X_1 \cup X_2$. Assim, pela Proposição 7.10(c), temos que a função

$$f(x) = \begin{cases} f|_{X_1}(x), & \text{se } x \in X_1, \\ f|_{X_2}(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases}$$

é contínua. □

AULA 8

Nesta aula, apresentaremos a *topologia das caixas*: uma maneira natural de dotar o produto cartesiano de uma família de espaços topológicos com uma topologia. Apesar de ser a topologia mais natural que se pode definir no produto cartesiano, ela carece de uma propriedade importante que o produto de espaços topológicos deveria satisfazer.

Começaremos a aula relembrando a construção do produto cartesiano de conjuntos e ilustrando-a com exemplos. Em seguida, construiremos a topologia das caixas, descreveremos como interiores e fechados se comportam nessa topologia e, por fim, mostraremos, por meio de um exemplo concreto, a importante propriedade que ela não satisfaz.

8.1. Produto cartesiano. Nesta subseção, relembraremos a construção do produto cartesiano de conjuntos, ilustraremos essa construção com exemplos concretos e mostraremos que o produto cartesiano de conjuntos não vazios é não vazio.

Definição 8.1 (de produto cartesiano). Dada uma família de conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$, o **produto cartesiano** desses conjuntos é definido como o conjunto

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ \chi: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \chi(i) \in X_i \text{ para todo } i \in I \right\}.$$

Vamos ilustrar a definição acima com exemplos concretos, começando pelo caso mais familiar: o produto cartesiano de dois conjuntos.

Exemplo 8.2. Dados dois conjuntos X e Y , o produto cartesiano pode ser identificado com o conjunto de pares ordenados

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}.$$

De fato, tomando $I = \{1, 2\}$, $X_1 = X$ e $X_2 = Y$ na definição geral, obtemos que

$$\prod_{i \in I} X_i = \{\chi: \{1, 2\} \rightarrow X \cup Y \mid \chi(1) \in X \text{ e } \chi(2) \in Y\}.$$

Observe que toda função χ nesse conjunto é unicamente determinada pelo par $(\chi(1), \chi(2))$, com $\chi(1) \in X$ e $\chi(2) \in Y$. Reciprocamente, todo par $(x, y) \in X \times Y$ induz uma única função $\chi \in \prod_{i \in I} X_i$, dada explicitamente por $\chi(1) = x$ e $\chi(2) = y$.

O exemplo anterior trata do caso com dois fatores. O próximo generaliza essa construção para um índice infinito enumerável: o produto $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ é precisamente o conjunto de todas as sequências de números reais.

Exemplo 8.3. O conjunto de sequências de números reais,

$$\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

pode ser identificado com o produto cartesiano $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$. De fato, tomando $I = \mathbb{N}$ e $X_n = \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ na Definição 8.1, vemos que os elementos de $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$, que são funções $\chi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, se identificam naturalmente com sequências de números reais.

Além de ilustrar alguns casos conhecidos, é útil observar como o produto cartesiano se comporta com respeito a subconjuntos: o produto cartesiano de subconjuntos se identifica naturalmente com um subconjunto do produto cartesiano.

Exemplo 8.4. Sejam I um conjunto não vazio, $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos e $\{Y_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos, com $Y_i \subseteq X_i$ para todo $i \in I$. O produto cartesiano $\prod_{i \in I} Y_i$ pode ser identificado com o subconjunto

$$\prod_{i \in I} Y_i = \left\{ \chi \in \prod_{i \in I} X_i \mid \chi(i) \in Y_i \text{ para todo } i \in I \right\} \subseteq \prod_{i \in I} X_i.$$

Sob essa identificação, a inclusão $\prod_{i \in I} Y_i \hookrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ é dada simplesmente pela inclusão de cada função $\chi: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} Y_i$ na coleção maior de funções $\chi: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$.

Os exemplos acima ilustram como o produto cartesiano funciona em casos concretos. Surge, naturalmente, a questão de saber se o produto de conjuntos não vazios é sempre não vazio. No caso de dois conjuntos finitos, esse fato segue do Exemplo 8.2, pois $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. Para famílias infinitas, contudo, a não-vacuidade do produto cartesiano não é demonstrável a partir dos axiomas usuais da teoria de conjuntos sem um axioma adicional: o *Axioma da Escolha*, cujo enunciado é o seguinte.

Axioma da Escolha. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos. Se $I \neq \emptyset$, $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, e $X_i \cap X_j = \emptyset$ para todos $i \neq j$ em I , então existe uma função $\varepsilon: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ tal que $\varepsilon(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.

O Axioma da Escolha não é demonstrável a partir dos demais axiomas da teoria de conjuntos: ele é independente deles e, portanto, deve ser adotado como um axioma. É possível mostrar que o Axioma da Escolha é equivalente ao Princípio da Boa Ordenação e ao Lema de Zorn. Além disso, ele é equivalente ao resultado a seguir, que é o principal resultado desta subseção.

Proposição 8.5. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos. Se $I \neq \emptyset$ e $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, então o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ também é não vazio.

Demonstração. Defina $\tilde{X}_i := X_i \times \{i\}$ para cada $i \in I$. Como $X_i \neq \emptyset$, então $\tilde{X}_i \neq \emptyset$. Além disso, $\tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, pois os segundos fatores, $\{i\}$ e $\{j\}$, são distintos. Assim, pelo Axioma da Escolha, existe uma função $\varepsilon: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ tal que $\varepsilon(i) \in \tilde{X}_i$ para todo $i \in I$. Isso significa que, para cada $i \in I$, existe $x_i \in X_i$ tal que $\varepsilon(i) = (x_i, i)$. Definindo $\chi: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ por $\chi(i) = x_i$, temos $\chi(i) \in X_i$ para todo $i \in I$, e portanto $\chi \in \prod_{i \in I} X_i$. $\square$

Para concluir esta subseção, apresentamos um exercício que relaciona o conjunto das partes de um conjunto com um produto cartesiano.

Exercício 8.1. Seja X um conjunto não vazio. Construa uma bijeção explícita para mostrar que o conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ pode ser identificado com o produto cartesiano $\prod_{x \in X} \{0, 1\}$.

Resolução (Angie). Vamos construir uma bijeção $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \prod_{x \in X} \{0, 1\}$. Para cada subconjunto A de X , defina $\varphi(A)$ como sendo a função característica de A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Observe que $\varphi(A) = \chi_A \in \prod_{x \in X} \{0, 1\}$ para todo subconjunto A de X .

Agora, vamos verificar que φ é uma função injetora. Para isso, suponha que A e B sejam dois subconjuntos de X . Se $A \neq B$, então existe $x \in X$ tal que: $x \in A$ e $x \notin B$, ou $x \notin A$ e $x \in B$. No primeiro caso, $\chi_A(x) = 1 \neq 0 = \chi_B(x)$ e, no segundo caso, $\chi_A(x) = 0 \neq 1 = \chi_B(x)$. Em ambos os casos, temos que $\varphi(A)(x) \neq \varphi(B)(x)$. Isso mostra que, se $A \neq B$, então $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, ou seja, que a função φ é injetora.

Agora, vamos verificar que φ é sobrejetora. Para isso, seja $\chi \in \prod_{x \in X} \{0, 1\}$, ou seja, $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$ é uma função. Considere o subconjunto $A_\chi := \chi^{-1}(\{1\})$. Vamos verificar que $\varphi(A_\chi) = \chi$. De fato, pela definição de φ , temos que

$$\varphi(A_\chi)(x) = \chi_{A_\chi}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_\chi, \\ 0, & \text{se } x \notin A_\chi. \end{cases}$$

Como $\chi : X \rightarrow \{0, 1\}$ e $\chi(x) = 1$ se, e somente se, $x \in A_\chi$, então $\chi(x) = 1$ se $x \in A_\chi$ e $\chi(x) = 0$ se $x \notin A_\chi$. Isso mostra que $\varphi(A_\chi) = \chi$ e, conseqüentemente, que φ é sobrejetora. $\square$

8.2. Topologia das caixas. Nesta subseção, dotaremos o produto cartesiano de espaços topológicos com uma topologia: a *topologia das caixas*. A ideia é simples: os abertos básicos serão produtos de abertos em cada fator. O lema a seguir garante que essa família é de fato uma base de topologia no produto cartesiano.

Lema 8.6. Seja $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos. A família $\prod_{i \in I} \tau_i$ é uma base de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$.

Demonstração. Vamos verificar as duas condições da Definição 2.5. Como $X_i \in \tau_i$ para todo $i \in I$, então $\prod_{i \in I} X_i \in \prod_{i \in I} \tau_i$. Logo todo elemento de $\prod_{i \in I} X_i$ pertence a algum elemento de $\prod_{i \in I} \tau_i$. Isso mostra que $\prod_{i \in I} \tau_i$ é uma subbase de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$.

Para mostrar que $\prod_{i \in I} \tau_i$ é uma base de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$, sejam B_1 e B_2 dois abertos básicos e $\chi \in B_1 \cap B_2$. Por definição, existem famílias de abertos $\{A_{i,1}\}_{i \in I}$ e $\{A_{i,2}\}_{i \in I}$, tais que: $A_{i,1}, A_{i,2} \in \tau_i$ para todo $i \in I$, $B_1 = \prod_{i \in I} A_{i,1}$ e $B_2 = \prod_{i \in I} A_{i,2}$. Defina $B_3 = B_1 \cap B_2$. Como $A_{i,1}, A_{i,2} \in \tau_i$, então $A_{i,1} \cap A_{i,2} \in \tau_i$ para todo $i \in I$. Daí, segue que $B_3 \in \prod_{i \in I} \tau_i$. Além disso, como $\chi \in B_1 \cap B_2$, então $\chi \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Isso mostra que $\prod_{i \in I} \tau_i$ é uma base de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$. $\square$

O lema acima garante que o produto de topologias é uma base de topologia no produto cartesiano, o que justifica a seguinte definição.

Definição 8.7 (de topologia das caixas). Dada uma família de espaços topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$, a **topologia das caixas** é a topologia em $\prod_{i \in I} X_i$ gerada pela base $\prod_{i \in I} \tau_i$.

Vamos ilustrar a construção da topologia das caixas em dois exemplos concretos. O primeiro trata do produto finito $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e mostra que, nesse caso, a topologia das caixas coincide com a topologia usual.

Exemplo 8.8. Consideremos $\mathbb{R}^2$ munido da topologia usual e o produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munido da topologia das caixas relativa às topologias usuais da reta $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que essas duas topologias são iguais.

Para isso, lembre que uma base da topologia usual de $\mathbb{R}^2$ consiste em bolas abertas e que essas bolas podem ser tomadas em relação a qualquer uma das métricas equivalentes $d_1, d_2, \dots, d_\infty$ (ver Exemplo 3.7 e Exercício 3.3). Além disso, lembre que a base da topologia das caixas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ consiste nos produtos $U \times V$, onde U e V são abertos de $\mathbb{R}$. Para ver que as duas bases geram a mesma topologia, observe que:

- Em relação à métrica d_∞ , as bolas abertas são da forma $(a, b) \times (c, d)$, com $a < b$ e $c < d$ em $\mathbb{R}$. Como esses conjuntos são produtos de abertos de $\mathbb{R}$, eles pertencem à base da topologia das caixas e, portanto, são abertos nessa topologia. Isso implica que a topologia das caixas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é pelo menos tão fina quanto a topologia usual de $\mathbb{R}^2$.
- Reciprocamente, para todo par de abertos $U, V \subseteq \mathbb{R}$ e todo ponto $(u, v) \in U \times V$, existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $(u - \varepsilon_1, u + \varepsilon_1) \subseteq U$ e $(v - \varepsilon_2, v + \varepsilon_2) \subseteq V$. Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, obtemos que

$$(u, v) \in (u - \varepsilon, u + \varepsilon) \times (v - \varepsilon, v + \varepsilon) \subseteq U \times V,$$

ou seja, a bola aberta de raio ε em torno de (u, v) na métrica d_∞ está contida em $U \times V$. Portanto, $U \times V$ é aberto na topologia usual de $\mathbb{R}^2$, e a topologia usual de $\mathbb{R}^2$ é pelo menos tão fina quanto a topologia das caixas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Das duas inclusões de topologias mostradas acima, concluímos que essas duas topologias coincidem.

O próximo exemplo examina um produto infinito de espaços discretos e mostra que a topologia das caixas resulta na topologia discreta no produto.

Exemplo 8.9. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos, todos munidos das respectivas topologias discretas. Vamos mostrar que a topologia das caixas em $\prod_{i \in I} X_i$ também é a topologia discreta.

Para isso, vamos mostrar que todo conjunto com um elemento em $\prod_{i \in I} X_i$ é aberto na topologia das caixas. De fato, observe que $\{\chi\} = \prod_{i \in I} \{\chi(i)\}$ para todo $\chi \in \prod_{i \in I} X_i$. Como $\{\chi(i)\}$ é aberto em X_i para todo $i \in I$ (pois todo X_i está munido com a topologia discreta), o produto $\prod_{i \in I} \{\chi(i)\}$ é um aberto básico da topologia das caixas. Como todo subconjunto Y de $\prod_{i \in I} X_i$ pode ser escrito como uma união de conjuntos com um elemento, $Y = \bigcup_{\chi \in Y} \{\chi\}$, segue que todo subconjunto de $\prod_{i \in I} X_i$ é aberto na topologia das caixas. Portanto, a topologia das caixas coincide com a topologia discreta nesse caso.

Agora, vamos apresentar algumas propriedades da topologia das caixas. Primeiro, veremos como interiores e fechados se comportam em relação a essa topologia.

Proposição 8.10. Seja $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos, considere o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia das caixas, e para cada $i \in I$, seja Y_i um subconjunto de X_i .

- (a) $(\prod_{i \in I} Y_i)^\circ = \prod_{i \in I} Y_i^\circ$.
- (b) $\overline{\prod_{i \in I} Y_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i}$.

Demonstração.

- (a) Vamos decompor a demonstração da igualdade $(\prod_{i \in I} Y_i)^\circ = \prod_{i \in I} Y_i^\circ$ na verificação de duas inclusões.

Para verificar que $(\prod_{i \in I} Y_i)^\circ \subseteq \prod_{i \in I} Y_i^\circ$, seja $\chi \in (\prod_{i \in I} Y_i)^\circ$. Como o interior de todo conjunto é aberto, existe um aberto básico $B = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \tau_i$ tal que $\chi \in B \subseteq (\prod_{i \in I} Y_i)^\circ$. Em particular, A_i é um subconjunto aberto de X_i contido em Y_i , para todo $i \in I$. Como o interior de Y_i é a união de todos os subconjuntos abertos de X_i contidos em Y_i , segue que $A_i \subseteq Y_i^\circ$. Como $\chi(i) \in A_i \subseteq Y_i^\circ$ para todo i , concluímos que $\chi \in \prod_{i \in I} Y_i^\circ$.

Para verificar que $\prod_{i \in I} Y_i^\circ \subseteq (\prod_{i \in I} Y_i)^\circ$, comece lembrando que $(\prod_{i \in I} Y_i)^\circ$ é a união de todos os subconjuntos abertos de $\prod_{i \in I} X_i$ contidos em $\prod_{i \in I} Y_i$. Assim, se mostrarmos que $\prod_{i \in I} Y_i^\circ$ é um aberto contido em $\prod_{i \in I} Y_i$, nós obteremos que $\prod_{i \in I} Y_i^\circ \subseteq (\prod_{i \in I} Y_i)^\circ$. Para ver que $\prod_{i \in I} Y_i^\circ$ é aberto, observe que ele é um produto de abertos de cada X_i . Portanto, $\prod_{i \in I} Y_i^\circ$ é um aberto básico da topologia das caixas. Para ver que $\prod_{i \in I} Y_i^\circ \subseteq \prod_{i \in I} Y_i$, observe que $Y_i^\circ \subseteq Y_i$ para todo $i \in I$. Isso implica que $\prod_{i \in I} Y_i^\circ \subseteq (\prod_{i \in I} Y_i)^\circ$.

- (b) Vamos decompor a demonstração da igualdade $\overline{\prod_{i \in I} Y_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i}$ na verificação de duas inclusões.

Para verificar que $\overline{\prod_{i \in I} Y_i} \subseteq \prod_{i \in I} \overline{Y_i}$, lembre que $\overline{\prod_{i \in I} Y_i}$ é a interseção de todos os subconjuntos fechados que contêm $\prod_{i \in I} Y_i$. Como $\prod_{i \in I} \overline{Y_i}$ é um subconjunto fechado que contém $\prod_{i \in I} Y_i$, obtemos que $\overline{\prod_{i \in I} Y_i} \subseteq \prod_{i \in I} \overline{Y_i}$.

Para verificar que $\prod_{i \in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\prod_{i \in I} Y_i}$, vamos checar que, para todo $\chi \in \prod_{i \in I} \overline{Y_i}$ e todo aberto A de $\prod_{i \in I} X_i$ que contém χ , temos que $A \cap (\prod_{i \in I} Y_i) \neq \emptyset$. Para isso, fixe $\chi \in \prod_{i \in I} \overline{Y_i}$ e um aberto A de $\prod_{i \in I} X_i$ que contém χ . Como $\prod_{i \in I} \tau_i$ é uma base da topologia das caixas em $\prod_{i \in I} X_i$, existe um aberto básico $B = \prod_{i \in I} A_i \in \prod_{i \in I} \tau_i$ tal que $\chi \in B \subseteq A$. Como $\chi(i) \in \overline{Y_i}$ e $\chi(i) \in A_i$, segue da Proposição 5.16 que $A_i \cap Y_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. Isso implica que $B \cap (\prod_{i \in I} Y_i) \neq \emptyset$ e, conseqüentemente, que $A \cap (\prod_{i \in I} Y_i) \neq \emptyset$. Daí e da Proposição 5.16, obtemos que $\chi \in \overline{\prod_{i \in I} Y_i}$. Logo, $\prod_{i \in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\prod_{i \in I} Y_i}$. $\square$

Para concluir esta aula, mostraremos em um exemplo concreto uma propriedade que a topologia das caixas não satisfaz. Trata-se da propriedade de decomposição e colagem de funções contínuas: dados espaços topológicos X_i e Y , queremos que uma função $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ seja contínua se, e somente se, cada componente

$(p_i \circ f): Y \rightarrow X_i$ for contínua, onde p_i denota a projeção no i -ésimo fator do produto. Como veremos, a topologia das caixas não satisfaz essa propriedade quando o índice é infinito. Esse será exatamente o ponto de partida da próxima aula, em que construiremos uma topologia que satisfaz essa propriedade.

Exemplo 8.11. Considere o conjunto de seqüências de números reais, identificado com o produto $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ (ver Exemplo 8.3), onde cada fator $\mathbb{R}$ é munido da topologia usual e o produto é munido da topologia das caixas. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a projeção

$$p_n: \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_n(\chi) = \chi(n),$$

é contínua. De fato, para todo aberto $A \subseteq \mathbb{R}$, a sua imagem inversa por p_n é dada por: $p_n^{-1}(A) = \prod_{k \in \mathbb{N}} A_k$, onde $A_k = A$ se $k = n$ e $A_k = \mathbb{R}$ se $k \neq n$. Como esse é um aberto básico da topologia das caixas, vemos que p_n é contínua.

Considere agora as funções $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (todas iguais à função identidade). Se existisse uma função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ tal que $p_n \circ f = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(x) = (x, x, x, \dots)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (a seqüência constante igual a x).

No entanto, essa função não é contínua em relação à topologia das caixas. De fato, considere o aberto básico $B := \prod_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. A pré-imagem $f^{-1}(B)$ consiste em todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $x \in (-1/n, 1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

Como $\{0\}$ não é aberto em $\mathbb{R}$, vemos que a função f não é contínua.

Portanto, não existe uma função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ (com a topologia das caixas) tal que $p_n \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa é precisamente a propriedade que o espaço produto deveria ter e que a topologia das caixas não satisfaz quando o conjunto de índices é infinito. Na próxima aula, construiremos uma topologia que satisfaz essa propriedade.

Para encerrar esta aula, propomos alguns exercícios que complementam e aprofundam o conteúdo apresentado.

Exercício 8.2. Considere o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Mostre que a topologia induzida pela ordem lexicográfica (ver Exercício 3.4) é igual ao produto da topologia discreta com a topologia usual da reta real $\mathbb{R}$.

Resolução (Celso). Seja τ_1 a topologia em $\mathbb{R}^2$ induzida pela ordem lexicográfica

$$(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) \iff a_1 < b_1 \text{ ou } a_1 = b_1 \text{ e } a_2 \leq b_2,$$

e seja τ_2 a topologia produto da topologia discreta da reta com a topologia usual da reta. Vamos mostrar que $\tau_1 = \tau_2$.

Para isso, vamos começar fixando bases para essas topologias. Pela demonstração do Exercício 3.4(c), temos que a família

$$\mathcal{B}_1 := \{(a, b) \mid a = (a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) = b \in \mathbb{R}^2\},$$

onde

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid a \preceq x \preceq b\}, \quad (8.3)$$

é uma base para τ_1 . Além disso, pelo Lema 9.1, temos que

$$\mathcal{B}_2 := \{\{x\} \times (a, b) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } (a, b) \text{ é um intervalo aberto em } \mathbb{R}\}$$

é uma base para τ_2 .

Para mostrar que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, vamos mostrar que, para todo $B_1 \in \mathcal{B}_1$ e $x \in B_1$, existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$. Pelo Lema 3.4, isso vai implicar que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. De fato, sejam $B_1 = ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \mathcal{B}_1$ e $x = (x_1, x_2) \in B_1$. Por definição, temos que $(a_1, a_2) \prec (x_1, x_2) \prec (b_1, b_2)$. Agora vamos analisar alguns casos:

- Se $a_1 < x_1 < b_1$, podemos tomar $B_2 := \{x_1\} \times (x_2 - 1, x_2 + 1)$. Observe que $B_2 \in \mathcal{B}_2$ e que, nesse caso, $x \in B_2$ e $B_2 \subseteq B_1$.
- Se $a_1 = x_1 < b_1$, então $a_2 < x_2$. Assim, podemos tomar $B_2 := \{x_1\} \times (a_2, x_2 + 1)$. Observe que $B_2 \in \mathcal{B}_2$ e que, nesse caso, $x \in B_2$ e $B_2 \subseteq B_1$.
- Se $a_1 < x_1 = b_1$, então $x_2 < b_2$. Assim, podemos tomar $B_2 := \{x_1\} \times (x_2 - 1, b_2)$. Observe que $B_2 \in \mathcal{B}_2$ e que, nesse caso, $x \in B_2$ e $B_2 \subseteq B_1$.
- Se $a_1 = x_1 = b_1$, então $a_2 < x_2 < b_2$. Assim, se tomarmos $B_2 := \{x_1\} \times (a_2, b_2)$, obtemos que $B_2 \in \mathcal{B}_2$, que $x \in B_2$ e que $B_2 \subseteq B_1$.

Isso mostra que, para todo $B_1 \in \mathcal{B}_1$ e $x \in B_1$, existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$, e implica que $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Agora, para mostrar que $\tau_2 \subseteq \tau_1$, vamos mostrar que $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$. Para isso, observe que, para todos $x, a, b \in \mathbb{R}$, temos que $\{x\} \times (a, b) = ((x, a), (x, b))$. Portanto, todo subconjunto em $\mathcal{B}_2$ também pertence a $\mathcal{B}_1$. Como $\langle \mathcal{B}_2 \rangle = \tau_2$, $\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \tau_1$, segue daí e do Exercício 2.4 que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. $\square$

Exercício 8.3. Seja $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e, para cada $i \in I$, seja $\mathcal{B}_i$ uma base da topologia τ_i . Mostre que $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é uma base da topologia das caixas em $\prod_{i \in I} X_i$.

Resolução (Daniel). Para mostrar que $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é uma base da topologia das caixas em $\prod_{i \in I} X_i$, vamos mostrar que ela é uma subbase de topologia, uma base de topologia, que a topologia das caixas é igual à topologia gerada por ela.

Vamos começar mostrando que $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é uma subbase de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$. Ou seja, vamos começar mostrando que, para todo $\chi \in \prod_{i \in I} X_i$, existe $B \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ tal que $\chi \in B$. Para isso, comece fixando $\chi \in \prod_{i \in I} X_i$. Para construir $B \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$, comece lembrando que

$$\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i = \left\{ \prod_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i \text{ para todo } i \in I \right\}.$$

Assim, $\chi \in B = \prod_{i \in I} B_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ se, e somente se, $\chi(i) \in B_i$ para todo $i \in I$. Como $\mathcal{B}_i$ é uma subbase de topologia em X_i por hipótese, então existe $B_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $\chi(i) \in B_i$, para todo $i \in I$. Assim, $B = \prod_{i \in I} B_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ contém χ . Isso mostra que $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é uma subbase de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$.

Agora, vamos mostrar que $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é uma base de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$. Para mostrar isso, comece fixando $B_1, B_2 \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ e $\chi \in B_1 \cap B_2$. Nós vamos construir $B_3 \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ tal que $\chi \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Para começar, como $B_1, B_2 \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$, segue da definição de $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ que existem $B_{1,i}, B_{2,i} \in \mathcal{B}_i$ tais que

$$B_1 = \prod_{i \in I} B_{1,i} \quad \text{e} \quad B_2 = \prod_{i \in I} B_{2,i}.$$

Assim, podemos escrever $B_1 \cap B_2 = \prod_{i \in I} (B_{1,i} \cap B_{2,i})$. Desta forma, o fato de χ pertencer a $B_1 \cap B_2$ implica que $\chi(i) \in B_{1,i} \cap B_{2,i}$ para todo $i \in I$. Daí e do fato de $\mathcal{B}_i$ ser uma base de topologia em X_i (por hipótese), segue que existe $B_{3,i} \in \mathcal{B}_i$ tal que $\chi(i) \in B_{3,i} \subseteq B_{1,i} \cap B_{2,i}$. Assim, se definirmos $B_3 = \prod_{i \in I} B_{3,i} \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$, obteremos que $\chi \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Isso mostra que $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é uma base de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$.

Para concluir, vamos mostrar que a topologia gerada por $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é igual à topologia das caixas. Como $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i \subseteq \prod_{i \in I} \tau_i$, segue do Exercício 2.4 que a topologia gerada por $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é mais grossa que a topologia das caixas. Para mostrar que a topologia gerada por $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ também é mais fina que a topologia das caixas, vamos mostrar que, para todo $A \in \prod_{i \in I} \tau_i$ e todo $\alpha \in A$, existe $B \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ tal que $\alpha \in B \subseteq A$. Pelo Lema 3.4, isso implicará que a topologia gerada por $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é mais fina que a topologia das caixas. Para isso, fixe $A \in \prod_{i \in I} \tau_i$ e $\alpha \in A$. Pela definição de $\prod_{i \in I} \tau_i$, existem $A_i \in \tau_i$ tais que $A = \prod_{i \in I} A_i$. Além disso, como $\alpha \in A$, então $\alpha(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Como $\mathcal{B}_i$ é uma base da topologia τ_i , segue daí que existem $B_i \in \mathcal{B}_i$ tais que $\alpha(i) \in B_i \subseteq A_i$, para todo $i \in I$. Assim, se tomarmos $B = \prod_{i \in I} B_i \in \prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$, obteremos que $\alpha \in B \subseteq A$. Pelo Lema 3.4, isso implica que a topologia gerada por $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i$ é mais fina que a topologia das caixas e, conseqüentemente, que elas são iguais. $\square$

Exercício 8.4. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e considere o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia das caixas. Mostre que, para todo ponto $\chi \in \prod_{i \in I} X_i$, a família $\prod_{i \in I} \mathcal{U}_{\chi(i), X_i}$ é uma base de vizinhanças de χ .

AULA 9

Nesta aula, construiremos a *topologia produto*: a topologia no produto cartesiano de uma família de espaços topológicos que satisfaz a propriedade universal do produto. Essa topologia é mais grossa do que a topologia das caixas da aula anterior e coincide com ela quando o conjunto de índices do produto é finito. Começaremos construindo uma base para essa topologia e verificando que ela satisfaz a propriedade universal. Em seguida, apresentaremos exemplos concretos, estudaremos como interiores e fechados se comportam na topologia produto e encerraremos a aula com exercícios que aprofundam o conteúdo.

9.1. Espaço produto e topologia produto. Dada uma família $\{X_i\}_{i \in I}$ de espaços topológicos, queremos dotar o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ de uma topologia que seja compatível com as topologias de cada fator. Mais explicitamente, a propriedade que desejamos que o espaço produto satisfaça é a seguinte:

- (i) Para todo $i \in I$, a projeção canônica $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ é contínua.
- (ii) Para todo espaço topológico Y e toda família de funções contínuas $f_i: Y \rightarrow X_i$, existe uma única função contínua $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ tal que $\pi_i \circ f = f_i$ para todo $i \in I$. Ou seja, sempre podemos completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow f & \searrow f_i & \\ \prod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{\pi_i} & X_i \end{array}$$

Como veremos na Proposição 9.5, a topologia produto é exatamente a topologia mais grossa em $\prod_{i \in I} X_i$ que torna todas as projeções π_i contínuas, e ela satisfaz a propriedade universal acima. Para defini-la explicitamente, começaremos construindo uma base para essa topologia.

Lema 9.1. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos. A família

$$\mathcal{B}_\Pi := \left\{ \prod_{i \in I} A_i \mid A_i \text{ é aberto em } X_i \text{ e } A_i \neq X_i \text{ para apenas finitos índices } i \in I \right\}$$

é uma base de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$.

Demonstração. Vamos verificar que $\mathcal{B}_\Pi$ satisfaz as duas condições da Definição 2.5. Para verificar que $\mathcal{B}_\Pi$ é uma subbase de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$, observe que $\prod_{i \in I} X_i$ pertence a $\mathcal{B}_\Pi$ (tomando $A_i = X_i$ para todo $i \in I$). Isso mostra que todo elemento de $\prod_{i \in I} X_i$ pertence a algum elemento de $\mathcal{B}_\Pi$.

Para verificar que $\mathcal{B}_\Pi$ é uma base de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$, sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\Pi$ e $\chi \in B_1 \cap B_2$. Vamos mostrar que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_\Pi$ também. Por definição, existem famílias de abertos $\{A_{i,1}\}_{i \in I}$ e $\{A_{i,2}\}_{i \in I}$, tais que: $A_{i,1}, A_{i,2} \subseteq X_i$, $A_{i,1}, A_{i,2} \neq X_i$ para uma quantidade finita de índices $i \in I$, $B_1 = \prod_{i \in I} A_{i,1}$, e $B_2 = \prod_{i \in I} A_{i,2}$.

Como $A_{i,1}, A_{i,2} \in \tau_i$, então $A_{i,1} \cap A_{i,2} \in \tau_i$. Como $A_{i,1} \cap A_{i,2} \neq X_i$ somente quando $A_{i,1} \neq X_i$ ou $A_{i,2} \neq X_i$, e isso ocorre apenas para uma quantidade finita de índices $i \in I$, temos que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_\Pi$. Como $\chi \in B_1 \cap B_2$, temos que $\chi(i) \in A_{i,1} \cap A_{i,2}$ para todo i , logo $\chi \in B_3 := B_1 \cap B_2$ e $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Isso mostra que $\mathcal{B}_\Pi$ é uma base de topologia em $\prod_{i \in I} X_i$. $\square$

O lema acima garante que $\mathcal{B}_\Pi$ é uma base de topologia no produto cartesiano. A intuição por trás dessa base é que seus elementos são produtos de abertos nos fatores, com a restrição de que apenas finitos fatores podem diferir do espaço todo. Essa restrição é exatamente o que garantirá que a propriedade universal seja satisfeita, como veremos na Proposição 9.5.

Definição 9.2 (de topologia e espaço produto). Dada uma família $\{X_i\}_{i \in I}$ de espaços topológicos, a **topologia produto** é a topologia em $\prod_{i \in I} X_i$ gerada pela base $\mathcal{B}_\Pi$, e o **espaço topológico produto** é o conjunto $\prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto $\langle \mathcal{B}_\Pi \rangle$.

Antes de verificar que o espaço topológico produto satisfaz a propriedade universal enunciada no início desta seção, vamos examinar dois exemplos concretos da topologia produto. O primeiro trata do produto de dois espaços com topologias simples.

Exemplo 9.3. Considere $X_1 = \{a, b\}$ munido da topologia trivial $\tau_1 = \{\emptyset, X_1\}$ e $X_2 = \{0, 1\}$ munido da topologia discreta $\tau_2 = \mathcal{P}(X_2)$. O produto cartesiano é $X_1 \times X_2 = \{(a, 0), (b, 0), (a, 1), (b, 1)\}$. Como o conjunto de índices é finito, a base $\mathcal{B}_\Pi$ consiste em todos os produtos $A_1 \times A_2$ com $A_1 \in \tau_1$ e $A_2 \in \tau_2$. Assim, a topologia produto em $X_1 \times X_2$ coincide com a topologia gerada pela base $\mathcal{B}_\Pi$ e é dada por

$$\langle \mathcal{B}_\Pi \rangle = \{\emptyset, X_1 \times \{0\}, X_1 \times \{1\}, X_1 \times X_2\}.$$

O próximo exemplo mostra que o produto de espaços discretos não é necessariamente discreto quando munido da topologia produto.

Exemplo 9.4. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos, todos munidos das respectivas topologias discretas. Suponha que I é infinito e que os conjuntos X_i têm mais de um elemento para todo $i \in I$. Então o conjunto $\{\chi\}$, formado por apenas um ponto $\chi \in \prod_{i \in I} X_i$, não é aberto na topologia produto. De fato, como cada X_i tem mais de um elemento, $\{\chi(i)\}$ está propriamente contido em X_i para todo i , e portanto $\{\chi\} = \prod_{i \in I} \{\chi(i)\}$ está propriamente contido em todo elemento de $\mathcal{B}_\Pi$, já que todo $B \in \mathcal{B}_\Pi$ satisfaz $A_i = X_i$ para infinitos índices i . Pela definição da topologia gerada (2.2), isso implica que $\{\chi\} \notin \langle \mathcal{B}_\Pi \rangle$ e, conseqüentemente, que a topologia produto de espaços discretos não é a topologia discreta quando o índice é infinito.

Agora, vamos verificar que o espaço produto de fato satisfaz a propriedade universal anunciada no início desta seção.

Proposição 9.5. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e considere o produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto $\langle \mathcal{B}_\Pi \rangle$.

- (a) Para todo $i \in I$, a projeção canônica $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$, dada explicitamente por $\pi_i(\chi) = \chi(i)$, é contínua.
- (b) A topologia produto em $\prod_{i \in I} X_i$ é a topologia mais grossa tal que todas as projeções canônicas $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ são contínuas.
- (c) Se Y é um espaço topológico e $\{f_i: Y \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ é uma família de funções contínuas, então a função $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ dada por $f(y)(i) = f_i(y)$ é contínua.
- (d) Dados um espaço topológico Y e uma função $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$: a função f é contínua se, e somente se, $\pi_i \circ f: Y \rightarrow X_i$ é contínua para todo $i \in I$.

Demonstração. (a) Para mostrar que todas as projeções, $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$, são contínuas, comece fixando $i \in I$. Queremos mostrar que $\pi_i^{-1}(A)$ é aberto em a projeção canônica $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ para todo aberto A de X_i . Para isso, observe que $\pi_i^{-1}(A) = \prod_{j \in I} A_j$, onde $A_j = A$ se $j = i$ e $A_j = X_j$ para todo $j \neq i$. Como A é aberto e apenas um fator (o fator i) difere de X_i , segue que $\pi_i^{-1}(A) \in \mathcal{B}_\Pi$. Portanto, $\pi_i^{-1}(A)$ é aberto em $\prod_{i \in I} X_i$. Isso mostra que π_i é contínua.

- (b) Para mostrar que a topologia produto é a mais grossa tal que todas as projeções canônicas são contínuas, suponha que τ é uma topologia em $\prod_{i \in I} X_i$ tal que todas as projeções canônicas $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ são contínuas. Vamos mostrar que $\langle \mathcal{B}_\Pi \rangle \subseteq \tau$, ou seja, que a topologia produto é mais grossa que τ . Para isso, verificaremos que $\mathcal{B}_\Pi \subseteq \tau$ e usaremos o Exercício 2.4 para concluir que $\langle \mathcal{B}_\Pi \rangle \subseteq \tau$.

Para verificar que $\mathcal{B}_\Pi \subseteq \tau$, comece fixando $B \in \mathcal{B}_\Pi$. Por definição, existem abertos $A_i \subseteq X_i$ tais que $A_i \neq X_i$ apenas para i num subconjunto finito $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq I$ e $B = \prod_{i \in I} A_i$. Observe que

$$B = \pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(A_{i_n}).$$

Como π_{i_k} é contínua em relação a τ e A_{i_k} é aberto em X_{i_k} para cada k , cada $\pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k})$ pertence a τ . Como τ é fechada por interseções finitas, conclui-se que $B \in \tau$. Logo $\mathcal{B}_\Pi \subseteq \tau$ e, pelo Exercício 2.4, obtemos que $\langle \mathcal{B}_\Pi \rangle \subseteq \tau$.

- (c) Suponha que $f_i: Y \rightarrow X_i$ é uma função contínua para cada $i \in I$. Para mostrar que a função $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ definida por $f(y)(i) = f_i(y)$ é contínua, vamos verificar que $f^{-1}(B)$ é aberto em Y para todo $B \in \mathcal{B}_\Pi$. Daí e do Lema 6.5, seguirá que f é contínua.

Para verificar que $f^{-1}(B)$ é aberto em Y para todo $B \in \mathcal{B}_\Pi$, comece fixando $B \in \mathcal{B}_\Pi$. Por definição, existem abertos $A_i \subseteq X_i$ tais que $A_i \neq X_i$ apenas para i num subconjunto finito $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ de I e $B = \prod_{i \in I} A_i$. Pela definição de f , temos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{y \in Y \mid f(y)(i) \in A_i \text{ para todo } i \in I\} \\ &= \{y \in Y \mid f_i(y) \in A_i \text{ para todo } i \in I\} \\ &= \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

Como $f_i^{-1}(A_i) = f_i^{-1}(X_i) = Y$ quando $A_i = X_i$, a interseção acima se reduz a uma interseção finita:

$$\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(A_i) = f_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap f_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(A_{i_n}).$$

Como A_{i_k} é aberto em X_{i_k} e f_{i_k} é contínua, cada $f_{i_k}^{-1}(A_{i_k})$ é aberto em Y . Logo a interseção finita acima é aberta em Y . Isso mostra que $f^{-1}(B)$ é aberto em Y . Como $\mathcal{B}_\Pi$ é uma base da topologia produto, segue daí e do Lema 6.5, que $f^{-1}(A)$ é aberto em Y para todo A aberto em $\prod_{i \in I} X_i$, ou seja, que f é contínua.

- (d) Primeiro, suponha que f é contínua. Como as projeções π_i são contínuas para todo $i \in I$ (pelo item (a)) e a composição de funções contínuas é contínua (ver Exemplo 6.4), segue que $\pi_i \circ f$ é contínua para todo $i \in I$. Isso prova a implicação “somente se”. Para a implicação “se”, suponha que $f_i := \pi_i \circ f$ é contínua para todo $i \in I$. Pelo item (c), a função f é contínua. $\square$

A proposição acima estabelece que a topologia produto é a topologia mais grossa que torna todas as projeções contínuas e que ela satisfaz a propriedade universal anunciada no início da aula. A proposição a seguir compara a topologia produto com a topologia das caixas e descreve como interiores e fechos se comportam em relação a cada uma delas.

Proposição 9.6. Sejam $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e, para cada $i \in I$, seja Y_i um subconjunto de X_i .

- (a) Se I for um conjunto finito, então a topologia das caixas coincide com a topologia produto.
- (b) Se $\prod_{i \in I} X_i$ estiver munido da topologia produto, então

$$\left(\prod_{i \in I} Y_i \right)^\circ = \begin{cases} \prod_{i \in I} Y_i^\circ, & \text{se } Y_i \neq X_i \text{ apenas para finitos índices } i \in I, \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (c) Se $\prod_{i \in I} X_i$ estiver munido da topologia produto, então

$$\overline{\prod_{i \in I} Y_i} = \prod_{i \in I} \overline{Y_i}.$$

Demonstração. (a) Como $\mathcal{B}_\Pi \subseteq \prod_{i \in I} \tau_i$ por definição, segue do Exercício 2.4 que $\langle \mathcal{B}_\Pi \rangle \subseteq \langle \prod_{i \in I} \tau_i \rangle$. Para mostrar a inclusão contrária, vamos verificar que, se I é um conjunto finito, então $\prod_{i \in I} \tau_i \subseteq \mathcal{B}_\Pi$. De fato, dado $B = \prod_{i \in I} A_i$ com $A_i \in \tau_i$, como I é finito, $A_i \neq X_i$ apenas para uma quantidade finita de índices e, portanto, $B \in \mathcal{B}_\Pi$. Isso mostra que $\prod_{i \in I} \tau_i \subseteq \mathcal{B}_\Pi$. Daí e do Exercício 2.4, segue que $\langle \prod_{i \in I} \tau_i \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}_\Pi \rangle$.

- (b) No caso em que $Y_i \neq X_i$ para apenas finitos índices i , a demonstração de que $(\prod_{i \in I} Y_i)^\circ = \prod_{i \in I} Y_i^\circ$ é completamente análoga à da Proposição 8.10(a).

No caso em que $Y_i \neq X_i$ para infinitos índices $i \in I$, mostraremos que não existe nenhum aberto não vazio de $\prod_{i \in I} X_i$ contido em $\prod_{i \in I} Y_i$. De fato,

suponha que A é um aberto não vazio de $\prod_{i \in I} X_i$ e que $a \in A$. Como $\mathcal{B}_\Pi$ é uma base da topologia produto, existe $B = \prod_{i \in I} A_i \in \mathcal{B}_\Pi$ com $a \in B \subseteq A$, onde $A_i = X_i$ para todos os índices i exceto um subconjunto finito. Como $Y_i \neq X_i$ para infinitos índices i e $A_i = X_i$ para quase todos os i , existem infinitos índices i para os quais $A_i = X_i \not\subseteq Y_i$. Logo $B \not\subseteq \prod_{i \in I} Y_i$ e, portanto, $A \not\subseteq \prod_{i \in I} Y_i$. Assim, $(\prod_{i \in I} Y_i)^\circ = \emptyset$.

- (c) A demonstração dessa parte é completamente análoga à demonstração da Proposição 8.10(b). $\square$

Para encerrar esta aula, apresentamos alguns exercícios que complementam e aprofundam o conteúdo apresentado.

Exercício 9.1. Seja $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e, para cada $i \in I$, seja $\mathcal{B}_i$ uma base da topologia τ_i . Mostre que, se $X_i \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in I$, então a família

$$\left\{ \prod_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i \text{ para todo } i \in I \text{ e } B_i \neq X_i \text{ para finitos índices } i \in I \right\}$$

é uma base da topologia produto em $\prod_{i \in I} X_i$.

Resolução (Mateus). Primeiro mostraremos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Dado $\prod_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}$, como $B_i \in \mathcal{B}_i$ e $\mathcal{B}_i$ é base de τ_i , então B_i é aberto em X_i , para todo $i \in I$. Além disso, por hipótese, temos que $B_i \neq X_i$ para finitos índices $i \in I$. Assim, todo $\prod_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}$ é um elemento da topologia produto τ ; ou seja, $\mathcal{B} \subseteq \tau$.

Agora, vamos mostrar que, para todo $A \in \tau$ e todo $a \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subseteq A$. Pelo Lema 3.4, isso vai implicar que $\tau \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$. Tomemos $A \in \tau$ e $a \in A$. Como A é aberto, $a \in A$ e $\mathcal{B}_\Pi$ é uma base da topologia produto τ , então existe $V = \prod_{i \in I} V_i$ com $V_i \in \tau_i$ para todo $i \in I$, $V_i \neq X_i$ para uma quantidade finita de índices $i \in I$, e $a \in V \subseteq A$. Como $a \in V = \prod_{i \in I} V_i$, então $a(i) \in V_i$ para todo $i \in I$. Além disso, como $V_i \in \tau_i$ e $\mathcal{B}_i$ é uma base de τ_i , então existe $B_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $a(i) \in B_i \subseteq V_i$, para todo $i \in I$. Ainda mais, como $A_i \neq X_i$ apenas para uma quantidade finita de índices i e $X_i \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in I$, podemos tomar $B_i = X_i$ para quase todos os índices i , exceto para aqueles tais que $A_i \neq X_i$. Assim, obtemos que $B := \prod_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}_\Pi$ e $a \in B \subseteq \prod_{i \in I} V_i \subseteq A$. Daí e do Lema 3.4, segue que $\langle \mathcal{B} \rangle$ é mais fina que a topologia produto em $\prod_{i \in I} X_i$. Como nós já havíamos provado que a topologia produto é mais fina que $\langle \mathcal{B} \rangle$, concluímos que as duas são iguais. Ou seja, $\mathcal{B}$ também é uma base para a topologia produto. $\square$

Exercício 9.2. Seja $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e considere seu produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto. Seja χ um ponto em $\prod_{i \in I} X_i$ e, para cada $i \in I$, seja $\mathcal{B}_i$ uma base de vizinhanças de $\chi(i)$ que contém X_i .

- (a) Mostre que

$$\left\{ \prod_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i \text{ para todo } i \in I \text{ e } B_i \neq X_i \text{ para finitos índices } i \in I \right\}.$$

é uma base de vizinhanças de χ em $\prod_{i \in I} X_i$.

- (b) Construa um exemplo em que $\mathcal{B}_i = \mathcal{U}_{\chi(i), X_i}$ para todo $i \in I$ e que a base de vizinhanças construída no item (a) está estritamente contida no sistema de vizinhanças de χ .

Exercício 9.3. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e considere $\prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto. Mostre que X_i é homeomorfo a um subespaço topológico de $\prod_{i \in I} X_i$, para todo $i \in I$.

Resolução (Zyon). Fixe $i \in I$. Para mostrar que X_i é um homeomorfo a um subespaço de $\prod_{i \in I} X_i$, vamos definir um subespaço topológico Y_i de $\prod_{i \in I} X_i$ e uma função $f : X_i \rightarrow Y_i$ que seja contínua, bijetora e sua inversa seja contínua.

Vamos começar definindo o subespaço topológico Y_i . Para isso, para cada $j \in I$, $j \neq i$, fixe um elemento $c_j \in X_j$ qualquer. Depois, considere o seguinte subconjunto:

$$Y_i := \left\{ \chi \in \prod_{i \in I} X_i \mid \chi(j) = c_j \text{ para todo } j \neq i \in I \right\}.$$

Para que Y_i seja um subespaço topológico de $\prod_{i \in I} X_i$, vamos muni-lo da topologia induzida, $\tau_{Y_i} = \{Y_i \cap A \mid A \in \tau\}$.

Agora vamos definir a função $f : X_i \rightarrow Y_i$:

$$f(x)(j) = \begin{cases} x, & \text{se } j = i, \\ c_j, & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Para completar, vamos mostrar que f é um homeomorfismo.

- **Injetividade.** Suponha que $x, x' \in X_i$ são tais que $f(x) = f(x')$. Pela definição de f , isso implica, em particular, que $x = f(x)(i) = f(x')(i) = x'$. Isso mostra que f é injetora.
- **Sobrejetividade.** Seja $\chi \in Y_i$. Vamos mostrar que $f(\chi(i)) = \chi$. Pela definição de Y_i , temos que $\chi(i) \in X_i$ para todo $i \in I$ e $\chi(j) = c_j$ para todo $j \neq i$. Assim,

$$f(\chi(i))(j) = \begin{cases} \chi(i), & \text{se } j = i, \\ \chi(j), & \text{se } j \neq i, \end{cases}$$

é exatamente igual a χ . Isso mostra que f é sobrejetora.

- **Continuidade.** Tome um aberto $A \in \tau_{Y_i}$. Vamos mostrar que

$$f^{-1}(A) = \{x \in X_i \mid f(x) \in A\}$$

é aberto em X_i . Para isso, fixe $x \in f^{-1}(A)$. Queremos mostrar que existe um aberto A_i de X_i tal que $x \in A_i \subseteq f^{-1}(A)$. Como $f(x) \in A$ e $A \in \tau_{Y_i}$, então existe $\tilde{A} \in \tau$ tal que $f(x) \in A = Y_i \cap \tilde{A}$. Além disso, como $f(x) \in Y_i \cap \tilde{A} \subseteq \tilde{A}$ e $\tilde{A}$ é aberto em relação à topologia produto, existe um aberto básico $\prod_{i \in I} A_i$ dessa topologia tal que $f(x) \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq \tilde{A}$. Em particular, temos que A_i é um aberto da topologia τ_i e $x = f(x)(i) \in A_i$. Além disso, também temos que $c_j = f(x)(j) \in A_j$ para todo $j \neq i$. Assim, concluímos que $f(a) \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq \tilde{A}$ para todo $a \in A$; ou seja, que $A_i \subseteq f^{-1}(A)$.

- Continuidade da inversa. Como f é bijetora, ela admite uma função inversa, $f^{-1} : Y_i \rightarrow X_i$. Essa função é dada explicitamente por:

$$f^{-1}(\chi) = \chi(i).$$

De fato, $f(f^{-1}(\chi)) = f(\chi(i)) = \chi$ para todo $\chi \in Y_i$ (ver item *Sobrejetividade*). Por outro lado, $f^{-1}(f(x)) = f(x)(i) = x$ para todo $x \in X_i$. Isso mostra que f^{-1} é realmente a inversa de f .

Agora vamos verificar que essa inversa é contínua. Para simplificar a notação, denote $g := f^{-1}$. Depois, tome A_i um aberto de X_i e note que a imagem inversa $g^{-1}(A_i)$ é

$$\begin{aligned} g^{-1}(A_i) &= \{\chi \in Y_i \mid g(\chi) \in A_i\} \\ &= \{\chi \in Y_i \mid \chi(i) \in A_i\} \\ &= \left\{ \chi \in \prod_{i \in I} X_i \mid \chi \in Y_i \text{ e } \chi(i) \in A_i \right\} \\ &= Y_i \cap \left(\prod_{i \in I} A_i \right), \quad \text{onde } A_j := X_j \text{ para todo } j \neq i. \end{aligned}$$

Como Y_i está munido da topologia induzida pela topologia produto de $\prod_{i \in I} X_i$ e $\prod_{i \in I} A_i$ é um aberto básico dessa topologia, segue que $g^{-1}(A_i)$ é aberto em Y_i . Portanto a função inversa $g = f^{-1}$ também é contínua. $\square$

Exercício 9.4. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e considere $\prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto.

- Mostre que as projeções canônicas $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$, dadas por $\pi_i(\chi) = \chi(i)$, são abertas.
- Dê um exemplo de uma família de espaços topológicos $\{X_i\}_{i \in I}$ tal que as projeções canônicas $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ não são fechadas.

AULA 10

Nesta aula, mostraremos como construir quocientes de espaços topológicos. A ideia central é a seguinte: dada uma função sobrejetora $p: X \rightarrow Y$, dotamos Y da topologia mais fina que torna p contínua. Esse procedimento abstrato tem uma instância concreta que consiste em tomar Y como sendo o conjunto de classes de equivalência de uma relação de equivalência induzida por p . Essa construção permite obter espaços topológicos clássicos, como o círculo, o cilindro e o toro, a partir de subconjuntos simples de $\mathbb{R}^n$. Ao longo dessa aula, verificaremos que o espaço quociente satisfaz uma propriedade universal e estudaremos como funções contínuas se comportam sob a passagem ao quociente.

10.1. Topologia quociente. Nesta subseção, definiremos a topologia quociente e ilustraremos a definição com dois exemplos explícitos. Vamos começar com um resultado que nos permite definir a topologia quociente.

Lema 10.1. Sejam (X, τ) um espaço topológico, Y um conjunto e $p: X \rightarrow Y$ uma função. A família $\tau_p := \{A \subseteq Y \mid p^{-1}(A) \in \tau\}$ é uma topologia em Y .

Demonstração. Vamos mostrar que τ_p satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.1.

- (i) Como $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$ e $p^{-1}(Y) = X \in \tau$, temos que $\emptyset, Y \in \tau_p$.
- (ii) Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma subfamília de τ_p . Por definição, $p^{-1}(A_i) \in \tau$ para cada $i \in I$. Como τ é uma topologia em X e

$$p^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(A_i) \in \tau,$$

concluimos que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_p$.

- (iii) Sejam $A_1, \dots, A_n \in \tau_p$. Por definição, $p^{-1}(A_i) \in \tau$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Como τ é uma topologia em X e

$$p^{-1}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = p^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p^{-1}(A_n) \in \tau,$$

concluimos que $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau_p$. □

O lema acima garante que a família τ_p é sempre uma topologia em Y . Isso justifica a definição a seguir. Intuitivamente, τ_p é a topologia em Y que recebe de X exatamente os abertos compatíveis via p : um subconjunto de Y é declarado aberto se, e somente se, sua pré-imagem é aberta em X .

Definição 10.2 (de topologia quociente). Dados um espaço topológico (X, τ) , um conjunto Y e uma função sobrejetora $p: X \rightarrow Y$, a topologia

$$\tau_p := \{A \subseteq Y \mid p^{-1}(A) \in \tau\}$$

em Y é chamada de **topologia quociente** e a função p é chamada de **aplicação quociente**.

A definição acima é bastante abstrata: dado um conjunto Y qualquer e uma função sobrejetora $p: X \rightarrow Y$, a topologia quociente em Y é determinada inteiramente por p e pela topologia de X . Os dois exemplos a seguir tornam essa construção mais concreta. O primeiro examina o caso em que Y é um conjunto finito, permitindo descrever τ_p explicitamente.

Exemplo 10.3. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual e a função $p: \mathbb{R} \rightarrow \{a, b, c\}$ dada por

$$p(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x < 0, \\ b, & \text{se } x = 0, \\ c, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Vamos descrever a topologia quociente τ_p explicitamente. Como τ_p é uma topologia em $\{a, b, c\}$, então $\emptyset$ e $\{a, b, c\}$ pertencem a τ_p . Para os demais subconjuntos, calculamos suas pré-imagens: $p^{-1}(\{a\}) = (-\infty, 0)$ é aberto em $\mathbb{R}$; $p^{-1}(\{b\}) = \{0\}$ não é aberto em $\mathbb{R}$; $p^{-1}(\{c\}) = (0, \infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$. Logo $\{a\}, \{c\}, \{a, c\} \in \tau_p$. Por outro lado, $p^{-1}(\{a, b\}) = (-\infty, 0]$ e $p^{-1}(\{b, c\}) = [0, \infty)$ não são abertos em $\mathbb{R}$, de modo que $\{a, b\}, \{b, c\} \notin \tau_p$. Verificando todos os subconjuntos restantes, concluímos que

$$\tau_p = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

O exemplo anterior ilustra uma topologia quociente sobre um conjunto finito. No próximo exemplo vamos ver que a topologia quociente induzida por uma projeção de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ coincide com a topologia usual de $\mathbb{R}$.

Exemplo 10.4. Considere $\mathbb{R}^2$ munido da topologia usual e a projeção $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x, y) = x$. Para qualquer subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, temos $p^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $A \times \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, A é aberto em relação à topologia usual de $\mathbb{R}$.

Por um lado, se A é aberto em $\mathbb{R}$, então, dado $(x, y) \in A \times \mathbb{R}$, existe $r > 0$ tal que $(x - r, x + r) \subseteq A$. Assim, $B((x, y), r) \subseteq (x - r, x + r) \times \mathbb{R} \subseteq A \times \mathbb{R}$, de modo que $A \times \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

Reciprocamente, suponha que $A \times \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}^2$. Para mostrar que A é aberto em $\mathbb{R}$, fixe $x \in A$. Depois, observe que o ponto $(x, 0) \in A \times \mathbb{R}$. Como $A \times \mathbb{R}$ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B((x, 0), r) \subseteq A \times \mathbb{R}$. Em particular, para todo $x' \in \mathbb{R}$ tal que $|x' - x| < r$, temos que $(x', 0) \in B((x, 0), r) \subseteq A \times \mathbb{R}$. Isso significa que $(x - r, x + r) \subseteq A$, e portanto que A é aberto em $\mathbb{R}$.

Com isso, concluímos que a topologia quociente em $\mathbb{R}$ induzida por p coincide com a topologia usual de $\mathbb{R}$.

Para encerrar esta subseção, propomos dois exercícios que estabelecem uma caracterização das aplicações quociente. O primeiro reformula a definição em termos de fechados. O segundo relaciona aplicações quociente com a existência de uma seção contínua.

Exercício 10.1. Sejam X, Y espaços topológicos e $p: X \rightarrow Y$ uma função. Mostre que p é uma aplicação quociente se, e somente se:

- (a) p é sobrejetora e A é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(A)$ é aberto em X ;
- (b) p é sobrejetora e Z é fechado em Y se, e somente se, $p^{-1}(Z)$ é fechado em X .

Resolução (Celso). (a) Vamos começar mostrando que, se $p : X \rightarrow Y$ for uma aplicação quociente, então p é sobrejetora, contínua, e que um subconjunto A de Y é aberto sempre que $p^{-1}(A)$ for aberto em X . De fato, pela Definição 10.2, p é sobrejetora. Além disso, $\tau_p = \{A \subseteq Y \mid p^{-1}(A) \text{ é aberto em } X\}$. Assim, se A for aberto em relação à τ_p , então $p^{-1}(A)$ é aberto em X ; ou seja, p é contínua; e se $p^{-1}(A)$ for aberto em X , então $A \in \tau_p$.

Reciprocamente, vamos mostrar que, se p for sobrejetora, contínua, e se um subconjunto A de Y for aberto sempre que $p^{-1}(A)$ for aberto em X , então p é uma aplicação quociente. Para isso, nós precisamos mostrar que p é sobrejetora e que τ_p é a topologia em Y . Por hipótese, p é sobrejetora. Além disso, a hipótese também garante que p é contínua, ou seja, que $p^{-1}(A)$ é aberto em X para todo subconjunto A aberto em Y . Logo, a topologia τ_p é mais fina que a topologia de Y . Para concluir, observe que a topologia em Y também é mais fina que a topologia τ_p , porque um subconjunto A de Y é aberto sempre que $p^{-1}(A)$ for aberto em X . Assim, pela Definição 10.2, temos que p é uma aplicação quociente.

- (b) Vamos começar mostrando que, se $p : X \rightarrow Y$ for uma aplicação quociente, então p é sobrejetora, contínua, e que um subconjunto Z de Y é fechado sempre que $p^{-1}(Z)$ for fechado em X . Como mostramos no item anterior, p é sobrejetora, contínua, e um subconjunto A de Y é aberto sempre que $p^{-1}(A)$ for aberto em X . Assim, se Z for um subconjunto de Y tal que $p^{-1}(Z)$ é fechado, temos que $p^{-1}(Y \setminus Z) = X \setminus p^{-1}(Z)$ é aberto em X . Logo, $Y \setminus Z \in \tau_p$, ou seja, o complementar de Z é aberto em Y e, conseqüentemente, Z é fechado em Y .

Reciprocamente, vamos mostrar que, se p for sobrejetora, contínua, e se um subconjunto Z de Y for fechado sempre que $p^{-1}(Z)$ for fechado em X , então p é uma aplicação quociente. Para isso, nós precisamos mostrar que p é sobrejetora e que τ_p é a topologia em Y . Por hipótese, p é sobrejetora. Além disso, a hipótese também garante que p é contínua, porque $p^{-1}(Z)$ é fechado em X para todo subconjunto Z fechado em Y (ver Lema 6.5). Logo, a topologia τ_p é mais fina que a topologia de Y . Para concluir, vamos checar que a topologia em Y também é mais fina que a topologia τ_p . Se $A \in \tau_p$, ou seja, se $p^{-1}(A)$ for aberto em X , então $X \setminus p^{-1}(A)$ é fechado em X . Como $p^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus p^{-1}(A)$ é fechado em X , por hipótese temos que $Y \setminus A$ é fechado em Y . Isso implica que A é aberto em relação à topologia de Y . Ou seja, todo aberto em τ_p também é aberto em relação à topologia de Y . $\square$

Exercício 10.2. Sejam X, Y espaços topológicos e $p : X \rightarrow Y$ uma função contínua e sobrejetora.

- (a) Mostre que, se existe uma função contínua $s : Y \rightarrow X$ tal que $p \circ s = \text{id}_Y$, então p é uma aplicação quociente.

- (b) Dê um exemplo de uma aplicação quociente $p: X \rightarrow Y$ tal que não existe nenhuma função contínua $s: Y \rightarrow X$ com $p \circ s = \text{id}_Y$.

Resolução (Daniel). (a) Suponha que exista uma função contínua $s: Y \rightarrow X$ tal que $p \circ s = \text{id}_Y$. Pelo exercício anterior, para mostrar que p é uma aplicação quociente, basta mostrar que p é sobrejetora, contínua e que A é aberto em Y sempre que $p^{-1}(A)$ for aberto em X . Como p é sobrejetora e contínua por hipótese, basta mostrar que A é aberto em Y sempre que $p^{-1}(A)$ for aberto em X . Assim, suponha que A seja um subconjunto de Y tal que $p^{-1}(A)$ é aberto em X . Como s é contínua, então $s^{-1}(p^{-1}(A))$ é aberto em Y . Como

$$s^{-1}(p^{-1}(A)) = (p \circ s)^{-1}(A) = \text{id}_Y^{-1}(A) = A,$$

concluimos que A é aberto em Y .

- (b) Considere o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, munido da sua topologia cofinita e considere o conjunto $\{0, 1\}$ munido da sua topologia trivial. Considere também a função

$$p: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{dada por} \quad p(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z \text{ for par,} \\ 1, & \text{se } z \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Observe que p é sobrejetora e contínua (pois $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $p^{-1}(\{0, 1\}) = \mathbb{Z}$). Observe também que p é uma aplicação quociente, porque $p^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{Z}$ somente se A for aberto em $\{0, 1\}$.

Agora, suponha que exista uma função $s: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $p \circ s = \text{id}$. Observe que isso implica que

$$0 = \text{id}(0) = p(s(0)) \quad \text{e} \quad 1 = \text{id}(1) = p(s(1)).$$

Logo, pela definição de p , temos que $s(0)$ é par e $s(1)$ é ímpar. Em particular, o aberto $\mathbb{Z} \setminus \{s(0)\}$ contém $s(1)$. Logo, $s^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{s(0)\}) = \{1\}$ não é aberto em $\{0, 1\}$. Isso mostra que s não pode ser contínua: ou seja, que não existe uma função contínua $s: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $p \circ s = \text{id}$. $\square$

Exercício 10.3. Sejam X, Y dois espaços topológicos e $p: X \rightarrow Y$ uma função sobrejetiva e contínua.

- Mostre que, se p é aberta, então p é uma aplicação quociente.
- Mostre que, se p é uma aplicação quociente e $p^{-1}(p(A))$ é aberto para todo A aberto em X , então p é uma função aberta.
- Encontre um exemplo de uma aplicação quociente que não é aberta.

Exercício 10.4. Sejam X, Y espaços topológicos, $p: X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente, e $S \subseteq X$ um subespaço tal que $p^{-1}(p(S)) = S$.

- Se S for aberto ou fechado, então $p|_S: S \rightarrow p(S)$ é uma aplicação quociente.
- Se p for uma função aberta ou fechada, então $p|_S: S \rightarrow p(S)$ é uma aplicação quociente.

10.2. Espaço quociente. Nesta subseção, especializaremos a construção da topologia quociente ao caso em que a função sobrejetora p é a projeção de um espaço topológico X sobre o conjunto de classes de equivalência de uma relação de equivalência.

Considere um conjunto C e uma relação de equivalência $\sim$ em C . Como $\sim$ é uma relação de equivalência, podemos considerar o **conjunto quociente**, formado pelas suas classes de equivalência. Explicitamente, para cada elemento $c \in C$, denote por $[c]$ a sua classe de equivalência, $[c] := \{x \in C \mid x \sim c\}$, e defina o **conjunto quociente** por

$$C/\sim := \{[c] \mid c \in C\}.$$

Observe que existe uma função sobrejetora natural $\pi: C \rightarrow C/\sim$, dada por $\pi(c) = [c]$ para todo $c \in C$. Além disso, quando C é um espaço topológico, podemos munir $C/\sim$ da topologia quociente induzida por π . O espaço topológico assim obtido é chamado de **espaço quociente** de C pela relação $\sim$.

A proposição a seguir mostra que qualquer aplicação quociente $p: X \rightarrow Y$ induz uma relação de equivalência natural em X e que o espaço quociente correspondente é homeomorfo a Y munido da topologia quociente.

Proposição 10.5. Sejam X, Y dois espaços topológicos e $p: X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente. Defina uma relação em X por

$$x_1 \sim x_2 \iff p(x_1) = p(x_2).$$

- (a) A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em X .
- (b) O espaço quociente $X/\sim$, munido da topologia induzida pela projeção canônica $\pi: X \rightarrow X/\sim$, dada por $\pi(x) = [x]$, é homeomorfo a Y .

Demonstração. (a) Lembre que $\sim$ é uma relação de equivalência se ela for reflexiva, simétrica e transitiva.

- Para verificar que $\sim$ é reflexiva, observe que $p(x) = p(x)$ para todo $x \in X$. Isso significa que $x \sim x$.
- Para verificar que $\sim$ é simétrica, observe que, se $x_1, x_2 \in X$ forem tais que $p(x_1) = p(x_2)$, então $p(x_2) = p(x_1)$ também. Isso significa que $x_2 \sim x_1$.
- Para verificar que $\sim$ é transitiva, observe que, se $x_1, x_2, x_3 \in X$ forem tais que $p(x_1) = p(x_2)$ e $p(x_2) = p(x_3)$, então $p(x_1) = p(x_3)$. Isso significa que $x_1 \sim x_3$.

Isso mostra que $\sim$ é uma relação reflexiva, simétrica, transitiva e, consequentemente, uma relação de equivalência.

- (b) Para mostrar que $(X/\sim)$ é homeomorfo a Y , vamos verificar que a função $h: (X/\sim) \rightarrow Y$ dada por $h([x]) = p(x)$ é um homeomorfismo.

Para verificar que h é um homeomorfismo, vamos começar checando que h está bem definida. Para isso, sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $[x_1] = [x_2]$. Pela definição de $\sim$, temos que $p(x_1) = p(x_2)$ e, consequentemente, que $h([x_1]) = p(x_1) = p(x_2) = h([x_2])$. Isso mostra que h está bem definida.

Agora, vamos checar que h é bijetora. Para começar, observe que, se x_1 e x_2 são elementos de X tais que $h([x_1]) = h([x_2])$, então $p(x_1) = p(x_2)$. Pela definição de $\sim$, isso implica que $x_1 \sim x_2$; ou seja, que h é injetora. Para justificar a afirmação de que h é sobrejetora, lembre que p é sobrejetora por hipótese. Assim, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Segue daí que $h([x]) = p(x) = y$; ou seja, que h é sobrejetora.

Agora, vamos checar que h é contínua. Para isso, seja A um subconjunto aberto de Y . Queremos mostrar que $h^{-1}(A)$ é aberto em $X/\sim$. Pela definição de h , temos que

$$\begin{aligned} h^{-1}(A) &= \{[x] \in (X/\sim) \mid h([x]) \in A\} \\ &= \{[x] \in (X/\sim) \mid p(x) \in A\} \\ &= \{[x] \in (X/\sim) \mid x \in p^{-1}(A)\}. \end{aligned}$$

Agora, como p é uma aplicação quociente e A é aberto em Y , então $p^{-1}(A)$ é aberto em X (ver Definição 10.2). Além disso, como a topologia em $X/\sim$ é a induzida pela projeção $X \rightarrow X/\sim$, ou seja, os abertos de $X/\sim$ são projeções de abertos de X , então $\{[x] \in (X/\sim) \mid x \in p^{-1}(A)\}$ é aberto em $X/\sim$. Isso implica que $h^{-1}(A)$ é aberto em $X/\sim$ e que h é contínua.

Para terminar de mostrar que h é um homeomorfismo, vamos checar que h é aberta. Para isso, considere um subconjunto $A \subseteq (X/\sim)$ aberto. Por definição, $h(A) = \{y \in Y \mid y = p(x) \text{ para algum } x \sim a, a \in A\}$. Para mostrar que $h(A)$ é aberto em Y , precisamos mostrar que $p^{-1}(h(A))$ é aberto em X . Observe que $p^{-1}(h(A)) = \{x \in X \mid x \sim a \text{ para algum } a \in A\} = \pi^{-1}(A)$. Como, por hipótese, A é aberto em $(X/\sim)$, então $\pi^{-1}(A)$ é aberto em X . $\square$

AULA 11

Nessa aula, vamos completar o conteúdo da aula passada, onde nós definimos aplicações quociente, topologias quociente e espaços quociente. Além disso, na Proposição 10.5, nós mostramos que toda aplicação quociente pode ser identificada com uma projeção concreta sobre um espaço quociente.

Vamos começar a aula com dois exemplos que ilustram essa construção. Depois, vamos mostrar que os espaços quocientes também satisfazem uma propriedade universal. Vamos começar descrevendo o círculo em $\mathbb{R}^2$ como um espaço quociente.

Exemplo 11.1. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual e a relação de equivalência

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Vamos verificar que $\sim$ é de fato uma relação de equivalência:

- Como $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $x \sim x$.
- Se $x, y \in \mathbb{R}$ forem tais que $x \sim y$, então $x - y \in \mathbb{Z}$. Como $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$, então $y \sim x$.
- Se $x, y, z \in \mathbb{R}$ forem tais que $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x - y \in \mathbb{Z}$ e $y - z \in \mathbb{Z}$. Como $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$, então $x \sim z$.

Agora vamos mostrar que o espaço quociente $\mathbb{R}/\sim$ é homeomorfo ao círculo unitário,

$$S^1 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}.$$

Para isso, considere a função $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p(\theta) = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta))$. Vamos verificar que p é uma aplicação quociente.

Para mostrar que p é sobrejetiva, seja $(a, b) \in S^1$. Como $a^2 + b^2 = 1$, em particular, $a \in [-1, 1]$. Como $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ é uma função sobrejetora, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\alpha) = a$. Como $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ e $a^2 + b^2 = 1$, então

$$\sin(\alpha)^2 = 1 - \cos(\alpha)^2 = 1 - a^2 = b^2.$$

Assim, $\sin(\alpha) = \pm b$. Se $\sin(\alpha) = b$, tomamos $\theta = \alpha/(2\pi)$ para obtermos que

$$p(\theta) = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = (a, b).$$

Senão, se $\sin(\alpha) = -b$, tomamos $\theta = -\alpha/(2\pi)$ para obtermos que

$$p(\theta) = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)) = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)) = (\cos(\alpha), -\sin(\alpha)) = (a, b).$$

Em ambos os casos, nós conseguimos construir $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $p(\theta) = (a, b)$. Isso mostra que p é sobrejetora.

Agora, vamos mostrar que a topologia em S^1 induzida da topologia usual de $\mathbb{R}^2$ é igual à topologia quociente induzida por p . Isso é equivalente a mostrar que um subconjunto A de S^1 é aberto (em relação à topologia induzida de $\mathbb{R}^2$) se, e somente se, $p^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R}$. Por um lado, se A for aberto em S^1 , como p é uma composição de funções contínuas em cada coordenada (multiplicação por 2π , cosseno e seno), então p é contínua e $p^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, suponha que A seja um subconjunto de S^1 tal que $p^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R}$. Para cada $a \in A$, vamos construir $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \cap S^1 \subseteq A$. Para isso, comece lembrando que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $p(\theta) = a$ (porque p é sobrejetora). Como $\theta \in p^{-1}(A)$ e $p^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(\theta - \epsilon, \theta + \epsilon) \subseteq p^{-1}(A)$. Em particular, se $x \in B(a, \epsilon) \cap S^1$, temos que $x \in A$ também. Isso mostra que p é uma aplicação quociente.

Observe também que $p(\theta_1) = p(\theta_2)$ se, e somente se, $\theta_1 - \theta_2 \in \mathbb{Z}$, ou seja, exatamente quando $\theta_1 \sim \theta_2$. Pela Proposição 10.5, concluímos que o espaço quociente $\mathbb{R}/\sim$ é homeomorfo a S^1 .

A construção acima identifica os pontos de $\mathbb{R}$ que diferem por um inteiro, enrolando a reta sobre o círculo. O próximo exemplo generaliza essa ideia a uma faixa horizontal $\mathbb{R} \times [0, 1]$: ao aplicar a mesma identificação apenas na primeira coordenada, enrolamos a faixa em torno de si mesma e obtemos um cilindro.

Exemplo 11.2. Considere o conjunto $\mathbb{R} \times [0, 1]$ munido da topologia produto (que coincide com a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}^2$) e a relação em $\mathbb{R} \times [0, 1]$ dada por

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ e } y_1 = y_2.$$

A verificação de que $\sim$ é uma relação de equivalência é análoga à do exemplo anterior:

- Como $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ e $y = y$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, então $(x, y) \sim (x, y)$.
- Se $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, então $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$ e $y_1 = y_2$. Logo, $x_2 - x_1 \in \mathbb{Z}$ e $y_2 = y_1$. Ou seja, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$.
- Se $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$, então $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$, $y_1 = y_2$, $x_2 - x_3 \in \mathbb{Z}$ e $y_2 = y_3$. Como $x_1 - x_3 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) \in \mathbb{Z}$ e $y_1 = y_2 = y_3$, então $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

Vamos mostrar que o espaço quociente $(\mathbb{R} \times [0, 1])/\sim$ é homeomorfo ao cilindro, $C := S^1 \times [0, 1]$. Para isso, considere a função

$$p: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow C \text{ dada por } p(t, z) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), z).$$

Agora, vamos verificar que p é uma aplicação quociente. Essa verificação é análoga à do exemplo anterior.

Para mostrar que p é sobrejetora, seja $(a, b, c) \in C$. Como $a^2 + b^2 = 1$, em particular, temos que $a \in [-1, 1]$. Daí e do fato que $[-1, 1]$ é a imagem da função cosseno, segue que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\alpha) = a$. Como $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ e $a^2 + b^2 = 1$, então

$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos(\alpha)^2} = \pm\sqrt{1 - a^2} = \pm\sqrt{b^2} = \pm|b|.$$

Assim, ajustando o sinal de α se necessário, obtemos que $p(\alpha/2\pi, c) = (a, b, c)$. Isso garante que p é sobrejetora.

Para concluir a demonstração de que p é uma aplicação quociente, nós precisamos verificar que a topologia em C induzida da topologia usual de $\mathbb{R}^3$ é igual à topologia

quociente induzida por p . Lembre que isso é equivalente a verificar que um subconjunto A de C é aberto se, e somente se, $p^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R} \times [0, 1]$. A implicação “somente se” segue do fato que p é uma função contínua (composição de funções contínuas em cada coordenada).

Para justificar a implicação “se”, suponha que A é um subconjunto de C tal que $p^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R} \times [0, 1]$ (munido da topologia produto). Vamos checar que A é aberto em C , ou seja, vamos checar que, para todo $(a, b, c) \in A$, existem $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tais que:

$$(a, b) \in S^1 \cap B((a, b), \epsilon_1) \quad \text{e} \quad c \in [0, 1] \cap (c - \epsilon_2, c + \epsilon_2).$$

De fato, se $(a, b, c) \in A$, a sobrejetividade de p implica que existe $(x, y) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ tal que $p(x, y) = (a, b, c)$, ou seja, tal que $\cos(2\pi x) = a$, $\sin(2\pi x) = b$ e $y = c$. Daí e do fato que $p^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R} \times [0, 1]$ segue que existem $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tais que

$$(x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \times ([0, 1] \cap (y - \epsilon_2, y + \epsilon_2)) \subseteq p^{-1}(A).$$

Isso implica que

$$(a, b) \in S^1 \cap B((a, b), \epsilon_1) \quad \text{e} \quad c \in [0, 1] \cap (c - \epsilon_2, c + \epsilon_2),$$

como queríamos, e justifica a afirmação que p é uma aplicação quociente.

Observe também que $p(t_1, z_1) = p(t_2, z_2)$ se, e somente se, $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$ e $z_1 = z_2$, ou seja, $(t_1, z_1) \sim (t_2, z_2)$. Pela Proposição 10.5, o espaço quociente $(\mathbb{R} \times [0, 1])/\sim$ é homeomorfo ao cilindro C .

Nos dois exemplos acima, nós obtivemos espaços clássicos como quocientes de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Os exercícios a seguir exploram construções análogas, que produzem outros dois espaços topológicos importantes: o toro e a faixa de Möbius.

Exercício 11.1. Considere $\mathbb{R}^2$ munido da topologia produto e a relação em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que a função $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$, dada por

$$p(x, y) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y)).$$

é uma aplicação quociente.

(c) Conclua que o espaço quociente $\mathbb{R}^2/\sim$ é homeomorfo ao [toro](#), $S^1 \times S^1$.

Exercício 11.2. Considere o conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$ munido da topologia produto (que coincide com a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}^2$) e a relação em $[0, 1] \times [0, 1]$ dada por

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \text{ou} \quad (\{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \quad \text{e} \quad y_1 + y_2 = 1).$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. O espaço quociente $([0, 1] \times [0, 1])/\sim$ é chamado de [faixa de Möbius](#).

Resolução (Israel). Para demonstrar que $\sim$ é uma relação de equivalência, precisamos verificar que ela satisfaz as três propriedades: reflexividade, simetria e transitividade.

Para verificar que $\sim$ é reflexiva, observe que, para qualquer $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, temos $(x, y) = (x, y)$. Portanto, pela primeira condição da definição, $(x, y) \sim (x, y)$.

Para mostrar que $\sim$ é simétrica, suponha que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ são tais que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$. Por definição, temos dois casos para analisar. Se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, então $(x_2, y_2) = (x_1, y_1)$. Assim, nesse caso, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$. Se $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$ e $y_1 + y_2 = 1$, então

$$\{x_2, x_1\} = \{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \quad \text{e} \quad y_2 + y_1 = y_1 + y_2 = 1.$$

Portanto, nesse caso, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$ também. Em ambos os casos, temos que $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$. Logo, a relação $\sim$ é simétrica.

Para mostrar que $\sim$ é transitiva, suponha que $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) são elementos em $[0, 1] \times [0, 1]$ tais que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$. Precisamos mostrar que $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$. Vamos analisar alguns casos:

- Se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (x_3, y_3)$, então $(x_1, y_1) = (x_3, y_3)$. Assim, nesse caso, $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.
- Se $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$, $y_1 + y_2 = 1$ e $(x_2, y_2) = (x_3, y_3)$, então

$$\{x_1, x_3\} = \{x_1, x_2\} = \{0, 1\} \quad \text{e} \quad y_1 + y_3 = y_1 + y_2 = 1.$$

Assim, nesse caso, também temos que $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

- Se $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ e $\{x_2, x_3\} = \{0, 1\}$, $y_2 + y_3 = 1$, então

$$\{x_1, x_3\} = \{x_2, x_3\} = \{0, 1\} \quad \text{e} \quad y_1 + y_3 = y_2 + y_3 = 1.$$

Assim, nesse caso também temos que $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

- Se $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$, $y_1 + y_2 = 1$, $\{x_2, x_3\} = \{0, 1\}$ e $y_2 + y_3 = 1$, então $(x_1, y_1) = (x_3, y_3)$. De fato, como $\{x_1, x_2\} = \{0, 1\}$ e $\{x_2, x_3\} = \{0, 1\}$, então $x_1 = x_3$. Além disso, como $y_1 + y_2 = 1$ e $y_2 + y_3 = 1$, então $y_1 = 1 - y_2 = y_3$. Isso mostra que $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$ nesse caso também.

Em todos os casos acima, concluímos que $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$. Logo, a relação $\sim$ também é transitiva. Como a relação $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva, então ela é uma relação de equivalência. $\square$

Para concluir esta aula, vamos estabelecer dois resultados que mostram que o espaço quociente satisfaz uma propriedade universal. A primeira caracteriza a topologia quociente como a topologia mais fina que torna a projeção contínua e fornece um critério para verificar a continuidade de funções definidas sobre o quociente.

Proposição 11.3. Sejam (X, τ) um espaço topológico, Y um conjunto e $p: X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora.

- (a) A topologia quociente é a topologia mais fina em Y tal que a função $p: X \rightarrow Y$ é contínua.

- (b) Seja Z um espaço topológico e considere Y munido da topologia quociente τ_p . Uma função $f: Y \rightarrow Z$ é contínua se, e somente se, a função $f \circ p: X \rightarrow Z$ é contínua.

Demonstração. (a) Primeiro, observe que, se Y é munido da topologia quociente τ_p , então p é contínua por construção: para todo $A \in \tau_p$, temos que $p^{-1}(A) \in \tau$ pela definição de τ_p . Depois, suponha que τ' seja uma topologia em Y tal que $p: X \rightarrow Y$ é contínua. Isso significa que, para todo $A \in \tau'$, temos que $p^{-1}(A) \in \tau$. Pela definição de τ_p , isso implica que $A \in \tau_p$. Isso mostra que $\tau' \subseteq \tau_p$, ou seja, que τ_p é mais fina do que qualquer topologia τ' em Y que torna p contínua.

- (b) Para mostrar a implicação “somente se”, suponha que f é contínua. Como Y está munido da topologia quociente, por construção, p também é contínua. Daí e do Exemplo 6.4 segue que $f \circ p$ é contínua. Para mostrar a implicação “se”, suponha que $f \circ p$ é contínua. Isso significa que $(f \circ p)^{-1}(A) = p^{-1}(f^{-1}(A)) \in \tau$ para todo aberto A de Z . Pela definição de τ_p , isso implica que $f^{-1}(A) \in \tau_p$, ou seja, que $f^{-1}(A)$ é aberto em Y . Como A era um aberto arbitrário de Z , isso mostra que f é contínua. $\square$

A próxima proposição complementa a proposição anterior e completa a demonstração de que o espaço quociente satisfaz uma propriedade universal. Ela estabelece um critério para que funções (contínuas e aplicações quociente) induzam funções (contínuas e aplicações quociente) no espaço quociente.

Proposição 11.4. Sejam X, Y, Z três espaços topológicos, $p: X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente, e $f: X \rightarrow Z$ uma função. Existe uma função $\bar{f}: Y \rightarrow Z$ tal que $\bar{f} \circ p = f$ se, e somente se, $f(x_1) = f(x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in X$ tais que $p(x_1) = p(x_2)$. Além disso, quando $\bar{f}$ existe:

- f é contínua se, e somente se, $\bar{f}$ é contínua;
- f é uma aplicação quociente se, e somente se, $\bar{f}$ é uma aplicação quociente.

Demonstração. Vamos provar primeiro a equivalência sobre a existência de $\bar{f}$. Para mostrar a implicação “somente se”, suponha que existe uma função $\bar{f}: Y \rightarrow Z$ tal que $f = \bar{f} \circ p$. Observe que, se $x_1, x_2 \in X$ forem tais que $p(x_1) = p(x_2)$, então

$$f(x_1) = \bar{f}(p(x_1)) = \bar{f}(p(x_2)) = f(x_2).$$

Isso mostra que $f(x_1) = f(x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in X$ tais que $p(x_1) = p(x_2)$.

Agora, para mostrar a implicação “se”, suponha que $f(x_1) = f(x_2)$ sempre que $p(x_1) = p(x_2)$. Vamos construir uma função $\bar{f}: Y \rightarrow Z$ tal que $\bar{f} \circ p = f$. Para isso, lembre que p é uma aplicação quociente e, em particular, é uma função sobrejetora. Assim, para todo $y \in Y$, podemos escolher $x \in p^{-1}(y)$ e definir $\bar{f}(y) := f(x)$. Essa função está bem definida, porque: se $x_1, x_2 \in p^{-1}(y)$, então $p(x_1) = y = p(x_2)$ e, consequentemente, $f(x_1) = f(x_2)$ (pela hipótese). Além disso, por construção, temos que $\bar{f} \circ p = f$.

Agora, vamos provar as duas afirmações adicionais. A primeira segue direto da Proposição 11.3(b). Para mostrar a segunda, suponha que $\bar{f}$ existe. Queremos mostrar que, nesse caso, f é uma aplicação quociente se, e somente se, $\bar{f}$ é uma aplicação quociente.

Primeiro, suponha que f é uma aplicação quociente. Queremos mostrar que $\bar{f}$ também é uma aplicação quociente. Para isso, primeiro vamos verificar que $\bar{f}$ é sobrejetora. Para começar, observe que, como f é uma aplicação quociente por hipótese, então f é sobrejetora. Isso implica que, para todo $z \in Z$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = z$. Assim, se tomarmos $y = p(x)$, teremos que $\bar{f}(y) = \bar{f}(p(x)) = f(x) = z$. Isso mostra que, para todo $z \in Z$, existe $y \in Y$ tal que $\bar{f}(y) = z$; ou seja, que $\bar{f}$ é sobrejetora.

Agora, para completar a demonstração de que $\bar{f}$ é uma aplicação quociente, vamos verificar que um subconjunto A de Z é aberto se, e somente se, $\bar{f}^{-1}(A)$ é aberto em Y . Como p é uma aplicação quociente, para todo subconjunto A de Z , temos que: $\bar{f}^{-1}(A)$ é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$ é aberto em X . Além disso, como f também é uma aplicação quociente, temos que: $f^{-1}(A)$ é aberto em X se, e somente se, A é aberto em Z . Isso mostra que A é aberto em Z se, e somente se, $\bar{f}^{-1}(A)$ é aberto em Y , o que conclui a demonstração de que $\bar{f}$ é uma aplicação quociente e da implicação “somente se”.

Reciprocamente, suponha que $\bar{f}$ é uma aplicação quociente. Queremos mostrar que f também é uma aplicação quociente. Para isso, primeiro vamos verificar que f é sobrejetora. Para começar, observe que, como $\bar{f}$ é uma aplicação quociente por hipótese, então $\bar{f}$ é sobrejetora. Isso implica que, para todo $z \in Z$, existe $y \in Y$ tal que $\bar{f}(y) = z$. Analogamente, como p é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Logo, $f(x) = \bar{f}(p(x)) = \bar{f}(y) = z$. Isso mostra que, para todo $z \in Z$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = z$, ou seja, que f é sobrejetora.

Agora, para completar a demonstração de que f é uma aplicação quociente, vamos verificar que um subconjunto A é aberto em Z se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é aberto em X . Para isso, observe que, como p é uma aplicação quociente, para todo subconjunto A de Z , temos que: $f^{-1}(A) = p^{-1}(\bar{f}^{-1}(A))$ é aberto em X se, e somente se, $\bar{f}^{-1}(A)$ é aberto em Y . Além disso, como $\bar{f}$ também é uma aplicação quociente por hipótese, temos que: $\bar{f}^{-1}(A)$ é aberto em Y se, e somente se, A é aberto em Z . Isso implica que A é aberto em Z se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é aberto em X , como queríamos. $\square$

AULA 12

Nesta aula, relembremos a definição de sequência e de convergência de sequências em espaços topológicos, apresentaremos exemplos que ilustram como a topologia do espaço afeta o comportamento das sequências e lembraremos dois resultados úteis para determinar a convergência de uma sequência. Em seguida, introduziremos os conjuntos dirigidos, que generalizam o conjunto dos números naturais e serão usados na próxima aula para definir redes.

12.1. Sequências. Nesta subseção, relembremos as definições de sequência, subsequência e convergência em espaços topológicos. Apresentaremos exemplos que ilustram como a topologia de um espaço determina o comportamento das sequências e estabeleceremos dois critérios de convergência de sequências.

Definição 12.1 (de sequência). Dado um conjunto X , uma **sequência** em X é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow X$. Em geral, denotamos $x(n)$ por x_n e a sequência $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um conjunto X , uma **subsequência** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma função $y: \mathbb{N} \rightarrow X$ da forma $y = x \circ i$, onde $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função que satisfaz: se $n < m \in \mathbb{N}$, então $i(n) < i(m)$.

Dados um espaço topológico X , uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X e um ponto $p \in X$, dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** para o ponto p quando: para toda vizinhança V de p , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$.

Observe que, se $X = \emptyset$, o conjunto de funções $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ é vazio, ou seja, não existem sequências no conjunto vazio. Por isso, a partir de agora, nessa aula, assumiremos que todos os nossos espaços topológicos são não vazios. O exemplo a seguir ilustra a definição acima em três casos concretos em $\mathbb{R}$.

Exemplo 12.2. Considere a reta real $\mathbb{R}$. Observe que a função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(n) = \frac{(-1)^n}{n}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$. Observe também que, se tomarmos $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como sendo a função dada por $i(n) = 2n$, temos que: se $n < m \in \mathbb{N}$, então $i(n) = 2n < 2m = i(m)$. Isso implica que a função $y = (x \circ i): \mathbb{N} \rightarrow X$, dada explicitamente por

$$y(n) = x(2n) = \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

é uma subsequência de x .

Vamos mostrar que, quando munimos $\mathbb{R}$ da sua topologia usual, a sequência x converge para o ponto 0. De fato, para toda vizinhança V de 0, existe $\epsilon > 0$ tal que $0 \in (-\epsilon, \epsilon) \subseteq V$. Assim, se tomarmos $n_0 = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$, teremos que $x(n) \in (-\epsilon, \epsilon) \subseteq V$ para todo $n \geq n_0$.

Observe que a convergência de uma sequência em um espaço topológico depende da topologia desse espaço. O exemplo a seguir mostra que, dependendo da topologia escolhida, uma sequência pode não convergir, convergir para um único ponto ou convergir para mais de um ponto.

Exemplo 12.3. Considere o conjunto $X = \{-1, 1\}$ e a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for par,} \\ -1, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Vamos mostrar que, dependendo da topologia com que munimos X , essa sequência pode não convergir, convergir para exatamente um ponto ou convergir para mais de um ponto simultaneamente.

Primeiro, vamos mostrar que, em relação à topologia trivial, $\{\emptyset, X\}$, essa sequência converge para 1 e para -1 . De fato, para ambos os pontos $p \in X$, temos que o seu sistema de vizinhanças é $\mathcal{U}_p = \{X\}$. Assim, para todo $p \in X$, todo $V \in \mathcal{U}_p$ e todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $x(n) \in V$. Isso significa que essa sequência converge para -1 e para 1 simultaneamente.

Agora, vamos mostrar que, em relação à topologia de Sierpinski, $\{\emptyset, \{1\}, X\}$, essa sequência converge apenas para o ponto -1 . De fato, lembre que o sistema de vizinhanças de 1 é $\mathcal{U}_1 = \{\{1\}, X\}$ e o de -1 é $\mathcal{U}_{-1} = \{X\}$. Como $x(2k+1) = -1 \notin \{1\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, a sequência não converge para 1. Por outro lado, como $x(n) \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $V \in \mathcal{U}_{-1}$, a sequência x converge para -1 .

Para concluir, vamos mostrar que, em relação à topologia discreta, $\mathcal{P}(X)$, a sequência x não converge para nenhum ponto de X . De fato, como o sistema de vizinhanças de 1 é $\mathcal{U}_1 = \{\{1\}, X\}$ e $x(2k+1) = -1 \notin \{1\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, a sequência não converge para 1. Analogamente, como o sistema de vizinhanças de -1 é $\mathcal{U}_{-1} = \{\{-1\}, X\}$ e $x(2k) = 1 \notin \{-1\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ela também não converge para -1 . Portanto x não converge para nenhum ponto de X .

O exemplo anterior revela que uma mesma sequência pode ter limites diferentes, dependendo da topologia do espaço. O exercício a seguir mostra um espaço topológico onde sequências diferentes podem não convergir, convergir para um ponto ou convergir para mais de um ponto.

Exercício 12.1. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia cofinita.

- (a) Construa uma sequência que não converge para nenhum ponto de $\mathbb{R}$.
- (b) Construa uma sequência que converge para apenas um ponto de $\mathbb{R}$.
- (c) Construa uma sequência que converge para mais de um ponto de $\mathbb{R}$.

Resolução (Roger). Começamos lembrando que, em relação à topologia cofinita, os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ são os subconjuntos A tais que $\mathbb{R} \setminus A$ é um conjunto finito ou $A = \emptyset$. Assim, o sistema de vizinhanças de um ponto $p \in \mathbb{R}$ é

$$\mathcal{U}_p = \{V \subseteq \mathbb{R} \mid p \in V \text{ e } \mathbb{R} \setminus V \text{ é um conjunto finito}\}.$$

Vamos usar essa caracterização para garantir a (não) convergência de sequência para pontos de $\mathbb{R}$.

(a) Vamos mostrar que a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par,} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

não converge para nenhum ponto em $\mathbb{R}$. De fato, para todo $p \neq -1$, podemos considerar a vizinhança $V = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Como $x_n = -1 \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar, vemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para $p \neq -1$. Analogamente, se $p = -1$, podemos considerar a vizinhança $V = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Como $x_n = 1 \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$ par, vemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também não converge para $p = -1$. Isso mostra que essa sequência não converge para nenhum ponto em $\mathbb{R}$.

(b) Fixe um ponto $c \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(n) = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (a sequência constante) converge apenas para o ponto $p = c$. De fato, como c pertence a toda vizinhança V de c , então $x(n) \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso mostra que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para c . Por outro lado, se $p \neq c$, podemos considerar a vizinhança $V = \mathbb{R} \setminus \{c\}$ de p . Como $x(n) = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x(n) \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso mostra que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para $p \neq c$.

(c) Vamos mostrar que a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(n) = n$ converge para todos os pontos de $\mathbb{R}$. Para isso, fixe um ponto $p \in \mathbb{R}$ e uma vizinhança V de p . Pela descrição acima, $\mathbb{R} \setminus V$ é um conjunto finito. Denote os seus elementos por $a_1, a_2, \dots, a_k$ e defina $n_0 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\} + 1$. Como $x(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x(n) > a_i$ para todo $n \geq n_0$ e $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Logo, $x(n) \notin \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, ou equivalentemente $x(n) \in V$, para todo $n \geq n_0$. Isso mostra que essa sequência converge para todo ponto $p \in \mathbb{R}$. $\square$

O próximo resultado fornece um critério prático para verificar a convergência de uma sequência: em vez de verificar a condição de convergência para toda vizinhança, basta verificá-la para os elementos de uma base de vizinhanças.

Lema 12.4. Sejam X um espaço topológico não vazio, $p \in X$ um ponto, $\mathcal{B}_p$ uma base de vizinhanças de p e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . A sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para p se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}_p$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. Primeiro suponha que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para p . Como $\mathcal{B}_p \subseteq \mathcal{U}_p$ por construção, então segue da definição de convergência que, para todo $B \in \mathcal{B}_p$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \geq n_0$.

Agora suponha que, para todo $B \in \mathcal{B}_p$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \geq n_0$. Vamos mostrar que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para p . Para isso, seja V uma vizinhança de p . Como $\mathcal{B}_p$ é uma base de vizinhanças de p , existe $B \in \mathcal{B}_p$ tal que $p \in B \subseteq V$. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \geq n_0$. Como $B \subseteq V$, segue que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Isso implica que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para p . $\square$

O lema acima é útil porque, em muitos espaços topológicos, existem bases de vizinhanças mais simples do que todo o sistema de vizinhanças. O exemplo a seguir ilustra isso no caso de espaços métricos, recuperando a definição clássica de convergência.

Exemplo 12.5. Sejam (X, d) um espaço métrico não vazio, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X e p um ponto de X . Pela Definição 1.10, a família $\mathcal{B}_p = \{B(p, r) \mid r > 0\}$ é uma base de vizinhanças de p em X . Pelo Lema 12.4, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para p se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(p, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$, ou seja, tal que $d(x_n, p) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Essa é exatamente a definição clássica de convergência em espaços métricos.

A proposição a seguir mostra que a convergência de uma sequência implica na convergência de toda subsequência dela e é equivalente ao fato de toda subsequência admitir uma subsequência convergente. Ela fornece uma caracterização útil em demonstrações por contradição.

Proposição 12.6. Sejam X um espaço topológico não vazio, p um ponto de X e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X .

- (a) Se a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o ponto p , então toda subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge para o ponto p .
- (b) Se toda subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência que converge para o ponto p , então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o ponto p .

Demonstração. (a) Suponha que a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ convirja para o ponto p e que $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ seja uma função tal que $i(n) < i(m)$ para todo $n < m \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que a subsequência $x \circ i$ também converge para o ponto p . Ou seja, vamos mostrar que, para todo $V \in \mathcal{U}_p$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x(i(n)) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Para isso, vamos mostrar primeiro que $i(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para isso, vamos usar indução em n . Para $n = 1$, temos que $i(1) \geq 1$, porque $i(n) \in \mathbb{N}$ e todo elemento de $\mathbb{N}$ é ≥ 1 . Como hipótese de indução, suponha que $n \geq 1$ e que $i(k) \geq k$ para todo $k \leq n$. Vamos mostrar que $i(n+1) \geq n+1$. Para isso, lembre que $i(n+1) > i(n)$ por hipótese. Daí e do fato de que $i(n) \geq n$, segue que $i(n+1) > n$, ou seja, que $i(n+1) \geq n+1$. Isso verifica o passo de indução e conclui a demonstração de que $i(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, vamos usar esse fato, junto com a hipótese de que a sequência x converge para p , para concluir que a subsequência $x \circ i$ também converge para p . De fato, dada uma vizinhança V de p , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Como $i(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x(i(n)) \in V$ para todo $n \geq n_0$ também. Isso mostra que a subsequência $x \circ i$ também converge para p .

- (b) Vamos demonstrar a contrapositiva. Suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não convirja para p . Então existe uma vizinhança V de p tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $j_n \geq n$ tal que $x_{j_n} \notin V$. A partir dessa sequência $\{j_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, é possível construir uma função estritamente crescente $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $x_{i_n} \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$y := x \circ i$ será uma subsequência que satisfaz $y_n = x_{i_n} \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como as subsequências de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também não possuem termos em V , essa é uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujas subsequências não convergem para p . $\square$

Para concluir esta subseção, apresentamos um exercício que relaciona a convergência de sequências ao fecho de subconjuntos.

Exercício 12.2. Sejam X um espaço topológico, Y um subconjunto de X e $p \in X$.

- (a) Mostre que, se existe uma sequência $x: \mathbb{N} \rightarrow Y$ que converge para p , então $p \in \overline{Y}$.
- (b) Dê um exemplo de um espaço topológico X , de um subconjunto $Y \subseteq X$ e de um ponto $p \in \overline{Y}$ tais que não existe nenhuma sequência $y: \mathbb{N} \rightarrow Y$ que convirja para p .

Resolução (Zyon). (a) Suponha que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em Y que converge para p . Pela definição de convergência, para toda vizinhança V de p , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Em particular, temos que $y_{n_0} \in V \cap Y$. Isso implica que, para toda vizinhança V de p , temos que $V \cap Y \neq \emptyset$. Pela Proposição 5.16, isso implica que $p \in \overline{Y}$.

- (b) Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da topologia dada por

$$\tau := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A = \emptyset \text{ ou } \mathbb{R} \setminus A \text{ é um conjunto enumerável}\}.$$

A verificação de que τ é uma topologia em $\mathbb{R}$ está contida no Exemplo 13.6. Agora considere $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $p = 0$. Note que $\overline{Y} = \mathbb{R}$. De fato, os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são fechados em relação à topologia τ são os subconjuntos enumeráveis e $\mathbb{R}$. Como o único desses subconjuntos que contém Y é $\mathbb{R}$, ele o menor fechado que contém Y . Assim, segue do Lema 5.13(a) que $\overline{Y} = \mathbb{R}$. Em particular, $p \in \overline{Y}$.

Agora vamos mostrar que não existe nenhuma sequência em Y que converge para p . Para isso, suponha que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência em Y . Como o conjunto $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável, então $A := \mathbb{R} \setminus \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Além disso, como $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em Y , então $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, A é uma vizinhança de p . Como $y_n \notin A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, essa sequência não pode convergir para p . $\square$

12.2. Conjuntos dirigidos. Nesta segunda parte da aula, introduziremos o conceito de conjunto dirigido e apresentaremos alguns exemplos. Essa estrutura generaliza o conjunto dos números naturais e será usado na próxima aula como domínio das redes.

Definição 12.7 (de conjunto dirigido). Um **conjunto dirigido** é um conjunto N munido de uma relação $\leq$ satisfazendo:

- (i) $n \leq n$ para todo $n \in N$;

- (ii) se $m, n, p \in N$ são tais que $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$;
- (iii) para todos $m, n \in N$, existe $\ell \in N$ tal que $m \leq \ell$ e $n \leq \ell$.

Observe que a relação $\leq$ de um conjunto dirigido não precisa ser uma relação de ordem, por não precisar se antissimétrica. Ou seja, podem existir elementos x e y em um conjunto dirigido N tais que $x \leq y$, $y \leq x$ e $x \neq y$. Por exemplo, o conjunto $N = \{0, 1\}$ munido da relação $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$ e $1 \leq 0$ é um conjunto dirigido, mas essa relação não é uma ordem parcial, pois $0 \leq 1$, $1 \leq 0$ e $0 \neq 1$. Relações que satisfazem apenas reflexividade e transitividade são chamadas de *pré-ordens*. Assim, os conjuntos dirigidos são conjuntos munidos de pré-ordens que satisfazem adicionalmente a condição (iii) acima.

No primeiro exemplo a seguir, vamos mostrar que $\mathbb{N}$ é um conjunto dirigido, quando munido da sua ordem usual.

Exemplo 12.8. O conjunto $\mathbb{N}$ munido da sua ordem $\leq$ usual é um conjunto dirigido. De fato:

- (i) $n \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) se $m, n, p \in \mathbb{N}$ são tais que $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$;
- (iii) para todos $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $\ell := \max\{m, n\} \in \mathbb{N}$, $m \leq \ell$ e $n \leq \ell$.

Nos próximos dois exemplos, vamos construir conjuntos dirigidos a partir de sistemas de vizinhanças e bases de vizinhanças de pontos em espaços topológicos. Esses conjuntos dirigidos serão fundamentais na definição de redes.

Exemplo 12.9. Dados um espaço topológico não vazio X e um ponto $p \in X$, o conjunto $N = \mathcal{U}_p$ munido da relação $U \leq V \Leftrightarrow U \supseteq V$ é um conjunto dirigido. De fato:

- (i) $U \supseteq U$ para todo $U \in \mathcal{U}_p$;
- (ii) se $U, V, W \in \mathcal{U}_p$ são tais que $U \supseteq V$ e $V \supseteq W$, então $U \supseteq W$;
- (iii) para todos $U, V \in \mathcal{U}_p$, temos que $W := U \cap V \in \mathcal{U}_p$, $U \supseteq W$ e $V \supseteq W$.

Exemplo 12.10. Sejam X um espaço topológico não vazio e um ponto $p \in X$. Qualquer base de vizinhanças $\mathcal{B}_p$ de p , quando munida da relação

$$B \leq B' \iff B \supseteq B',$$

é um conjunto dirigido. De fato:

- (i) $B \supseteq B$ para todo $B \in \mathcal{B}_p$;
- (ii) se $B, B', B'' \in \mathcal{B}_p$ são tais que $B \supseteq B'$ e $B' \supseteq B''$, então $B \supseteq B''$;
- (iii) se $B, B' \in \mathcal{B}_p$, como $p \in B \cap B'$, então existe $B'' \in \mathcal{B}_p$ tal que $p \in B'' \subseteq B \cap B'$. Logo, $B'' \in \mathcal{B}_p$, $B \supseteq B''$ e $B' \supseteq B''$.

Exercício 12.3. Sejam $(N, \leq)$ um conjunto dirigido não vazio. Mostre que, para todo subconjunto finito S de N , existe $n \in N$ tal que $s \leq n$ para todo $s \in S$.

AULA 13

13.1. Redes. Após relembrar a definição de sequências e introduzir a noção de conjunto dirigido, nesta aula, vamos definir redes, subredes e suas convergências. Uma *rede* é uma generalização de uma sequência, onde o domínio é um conjunto dirigido arbitrário em vez de $\mathbb{N}$. Depois de defini-las e exemplificá-las, mostraremos que as redes são o instrumento correto para caracterizar o fecho de subconjuntos e a continuidade de funções em espaços topológicos gerais, papéis que as sequências só desempenham adequadamente em espaços primeiro enumeráveis. As redes superam essa limitação.

Definição 13.1 (de rede). Dado um conjunto X , uma *rede* em X é uma função $x: N \rightarrow X$, onde N é um conjunto dirigido. Em geral, denotamos $x(n)$ por x_n e a rede por $(x_n)_{n \in N}$.

Uma *subrede* de uma rede $(x_n)_{n \in N}$ é uma rede $(y_m)_{m \in M}$ da forma $y = x \circ i$, onde M é um conjunto dirigido e $i: M \rightarrow N$ é uma função satisfazendo:

- (i) se $m_1 \leq m_2 \in M$, então $i(m_1) \leq i(m_2) \in N$;
- (ii) para todo $n \in N$, existe $m \in M$ tal que $n \leq i(m)$.

Dado um espaço topológico X , dizemos que uma rede $(x_n)_{n \in N}$ em X *converge* para um ponto $p \in X$ quando, para toda vizinhança V de p , existe $n_0 \in N$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$.

Pelo Exemplo 12.8, $\mathbb{N}$ com a ordem usual é um conjunto dirigido e, portanto, toda sequência $x: \mathbb{N} \rightarrow X$ é uma rede em X . Além disso, toda subsequência de x é uma subrede, porque toda função estritamente crescente $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfaz as condições (i) e (ii) acima. Ainda mais, observe que uma sequência x converge para um ponto p (no sentido da Definição 12.1) se, e somente se, a rede x converge para p (no sentido da Definição 13.1).

Nos dois exemplos a seguir, vamos construir redes que não necessariamente correspondem a sequências. O primeiro exemplo será de redes indexadas pelo sistema de vizinhanças de um ponto.

Exemplo 13.2. Sejam X um espaço topológico não vazio e $p \in X$. Lembre do Exemplo 12.9 que $\mathcal{U}_p$ é um conjunto dirigido, quando munido da relação

$$U \leq U' \iff U \supseteq U'.$$

Assim, toda função $x: \mathcal{U}_p \rightarrow X$ é uma rede em X .

Por exemplo, se tomarmos $x(U) = p$ para todo $U \in \mathcal{U}_p$, obtemos uma rede que converge para o ponto p . De fato, para todo $V \in \mathcal{U}_p$, temos que $p \in V$. Em geral, toda função $x: \mathcal{U}_p \rightarrow X$ tal que $x(U) \in U$ para todo $U \in \mathcal{U}_p$ é uma rede que converge para o ponto p . De fato, para todo $V \in \mathcal{U}_p$, se tomarmos $n_0 = V$, obtemos que $x(U) \in U \subseteq V$ para todo $n = U \in \mathcal{U}_p$ tal que $V \leq U$.

No próximo exemplo, vamos construir redes indexadas por uma base de vizinhanças de um ponto.

Exemplo 13.3. Sejam X um espaço topológico não vazio, p um ponto de X , e $\mathcal{B}_p$ uma base de vizinhanças de p . Lembre do Exemplo 12.10 que $\mathcal{B}_p$ é um conjunto dirigido, quando munido da relação $B \leq B' \Leftrightarrow B \supseteq B'$. Assim, toda função $x : \mathcal{B}_p \rightarrow X$ é uma rede em X .

Agora observe que, para toda rede $x : \mathcal{U}_p \rightarrow X$ a sua restrição para $\mathcal{B}_p$ é uma subrede em X . De fato, como $\mathcal{B}_p \subseteq \mathcal{U}_p$, existe uma função $i : \mathcal{B}_p \rightarrow \mathcal{U}_p$, dada explicitamente por $i(B) = B$. Além disso, se $B_1 \leq B_2$ em $\mathcal{B}_p$ (ou seja, se $B_2 \subseteq B_1$), então $i(B_1) \leq i(B_2)$ em $\mathcal{U}_p$ (pois, $i(B_2) = B_2 \subseteq B_1 = i(B_1)$). Ainda mais, pela definição de base de vizinhanças, para todo $U \in \mathcal{U}_p$, existe $B \in \mathcal{B}_p$ tal que $i(B) = B \subseteq U$ (ou seja, $U \leq B$). Isso mostra que, de fato, $(x \circ i) : \mathcal{B}_p \rightarrow X$ é uma subrede de x .

Assim como no exemplo anterior, toda função $x : \mathcal{B}_p \rightarrow X$ tal que $x(B) \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}_p$ será uma rede que converge para o ponto p . Por exemplo, considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. A família $\{(-\varepsilon, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ é uma base de vizinhanças para o ponto $p = 0$. Assim, se definirmos $x(-\varepsilon, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, obtemos uma rede que converge para 0.

Por outro lado, para construir uma rede $x : \mathcal{B}_p \rightarrow X$ que não converge para p , nós precisamos escolher x de tal forma que exista $V \in \mathcal{U}_p$ tal que, para todo $B \in \mathcal{B}_p$, exista $B' \subseteq B$ (ou seja, $B \leq B'$) tal que $x(B') \notin V$. Por exemplo, considere novamente a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual, o ponto $p = 0$, e a base de vizinhanças $\{(-\varepsilon, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$. Se definirmos

$$x(-\varepsilon, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{se } \varepsilon \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } \varepsilon \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

obtemos uma rede que não converge para 0.

Os exemplos acima ilustram algumas construções de redes em espaços topológicos. Os dois exercícios a seguir mostram que as redes se comportam de maneira semelhante às sequências em relação à convergência.

Exercício 13.1. Sejam X um espaço topológico não vazio, $p \in X$ um ponto, $\mathcal{B}_p$ uma base de vizinhanças de p e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma rede em X . Mostre que: a rede $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para p se, e somente se, para todo $B \in \mathcal{B}_p$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \leq n$.

Exercício 13.2. Sejam X um espaço topológico não vazio, p um ponto de X e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma rede em X .

- Mostre que, se a rede $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o ponto p , então toda subrede de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge para o ponto p .
- Mostre que, se toda subrede de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subrede que converge para o ponto p , então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o ponto p .

Agora, vamos provar dois resultados que mostram que as redes desempenham um papel análogo ao que as sequências desempenham em espaços métricos. Nessa primeira proposição, vamos mostrar como caracterizar fechados de subconjuntos através de limites de redes.

Proposição 13.4. Sejam X um espaço topológico não vazio e Y um subconjunto de X . Um ponto $p \in X$ pertence a $\overline{Y}$ se, e somente se, existe uma rede $y: N \rightarrow Y$ que converge para p .

Demonstração. “Somente se”: Suponha que $p \in \overline{Y}$. Pela Proposição 5.16(c), isso implica que $U \cap Y \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_p$. Portanto, para cada $U \in \mathcal{U}_p$, podemos escolher $y_U \in U \cap Y$. Isso define uma rede $y: \mathcal{U}_p \rightarrow Y$. Como, para toda vizinhança V de p e todo $U \in \mathcal{U}_p$ tal que $V \leq U$, temos que $y_U \in U \subseteq V$, concluímos que a rede y converge para p .

“Se”: Suponha que existe uma rede $y: N \rightarrow Y$ que converge para um ponto p em X . Isso significa que, para todo $V \in \mathcal{U}_p$, existe $n_0 \in N$ tal que $y_n \in V$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$. Em particular, $y_{n_0} \in V \cap Y$. Logo $V \cap Y \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{U}_p$. Pelo Proposição 5.16(c), isso implica que $p \in \overline{Y}$. $\square$

Lembre que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ costuma ser dita contínua (em relação à topologia usual da reta) quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. A proposição acima mostra que, no caso de espaços topológicos mais gerais, é necessário substituir o limite de sequências pelo limite de redes.

Proposição 13.5. Sejam X e Y espaços topológicos não vazios. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é contínua em um ponto $p \in X$ se, e somente se, para toda rede $(x_n)_{n \in N}$ em X que converge para p , a rede $(f(x_n))_{n \in N}$ converge para $f(p)$.

Demonstração. “Somente se”: Suponha que f seja contínua em p e seja $x: N \rightarrow X$ uma rede que converge para p . Para mostrar que a rede $(f \circ x): N \rightarrow Y$ converge para $f(p)$, comece fixando uma vizinhança V de $f(p)$. Como f é contínua em p , existe uma vizinhança U de p tal que $f(U) \subseteq V$ (ver Lema 6.5(b)). Além disso, como $(x_n)_{n \in N}$ converge para p , existe $n_0 \in N$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$. Logo $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$; o que mostra que a rede $(f(x_n))_{n \in N}$ converge para $f(p)$.

“Se”: Vamos mostrar a contrapositiva. Suponha que f não é contínua em p . Então existe uma vizinhança V de $f(p)$ tal que $f^{-1}(V)$ não é uma vizinhança de p , ou seja, para todo $U \in \mathcal{U}_p$, temos $U \setminus f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Para cada $U \in \mathcal{U}_p$, escolha $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$, de modo que $f(x_U) \notin V$. Isso define uma rede $x: \mathcal{U}_p \rightarrow X$. Como $x_U \in U$ para todo $U \in \mathcal{U}_p$, a rede x converge para p pelo Exemplo 13.2. No entanto, $f(x_U) \notin V$ para todo $U \in \mathcal{U}_p$, de modo que a rede $(f(x_U))_{U \in \mathcal{U}_p}$ não converge para $f(p)$. $\square$

O próximo exemplo mostra um caso concreto de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (a função identidade) que não é contínua, mas que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ para toda sequência x que converge para a .

Exemplo 13.6. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da topologia

$$\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus A \text{ é enumerável ou } A = \emptyset\}.$$

Primeiro, vamos verificar que τ é, de fato, uma topologia em $\mathbb{R}$. Para isso, vamos checar que τ satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 1.1:

- (i) $\emptyset \in \tau$ por construção e $\mathbb{R} \in \tau$ porque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ é um conjunto enumerável.
- (ii) Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos em τ . Vamos analisar dois casos distintos. Se $\mathbb{R} \setminus A_i$ for enumerável para algum $i \in I$, então

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus A_i)$$

é enumerável, porque está contido em $\mathbb{R} \setminus A_i$. Caso contrário, se $A_i = \emptyset$ para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$ também.

- (iii) Seja $A_1, A_2, \dots, A_n$ for uma família finita de conjuntos em τ . Vamos analisar dois casos também. Se $\mathbb{R} \setminus A_i$ for enumerável para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, então

$$\mathbb{R} \setminus (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = (\mathbb{R} \setminus A_1) \cup (\mathbb{R} \setminus A_2) \cup \dots \cup (\mathbb{R} \setminus A_n)$$

também é enumerável. Caso contrário, se $A_i = \emptyset$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, então $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$ também.

Como nós verificamos acima, τ é uma topologia em $\mathbb{R}$. Observe que essa topologia não é comparável à topologia usual da reta. De fato, por um lado, o conjunto dos números irracionais, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, é aberto em relação à τ e não é aberto em relação à topologia usual. Por outro lado, o intervalo $(-1, 1)$ é aberto em relação à topologia usual de $\mathbb{R}$, mas não é aberto em relação à τ , porque ele não é vazio e seu complementar também não é enumerável. Isso implica que a função identidade $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não será contínua se munirmos o domínio com a topologia τ e o contradomínio com a sua topologia usual. No entanto, toda sequência convergente em relação à topologia τ também será convergente em relação à topologia usual.

Para justificar essa última afirmação, suponha que $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma sequência que converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$ e que $\mathbb{R}$ esteja munida com a topologia τ . Vamos mostrar que isso implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) = p$ para todo $n \geq n_0$. De fato, por definição, o fato de x convergir para p significa que, para toda vizinhança $V \in \mathcal{U}_p$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Em particular, observe que nós podemos tomar $V = \mathbb{R} \setminus \{x(n) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } x(n) \neq p\}$. Como existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) \in V$ para todo $n \geq n_0$, então $x(n) = p$ para todo $n \geq n_0$. Isso significa que uma sequência convergente em relação à topologia τ é eventualmente constante e, consequentemente, convergente em relação à topologia usual de $\mathbb{R}$.

Com isso, nós concluímos que a função identidade $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ não é contínua quando munimos o domínio com a topologia τ e o contradomínio com a sua topologia usual. Mas, se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$ em relação à topologia τ , então a sequência $(\text{id}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ também converge para p em relação à topologia usual de $\mathbb{R}$.

Para concluir esta aula, vamos enunciar dois exercícios que aplicam e expandem o conteúdo apresentado.

Exercício 13.3. Sejam I um conjunto não vazio e $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos não vazios. Considere $\prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto e, para cada $i \in I$, denote por $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ a projeção canônica. Sejam N um conjunto dirigido e $x: N \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ uma rede.

- (a) Mostre que $(\pi_i \circ x): N \rightarrow X_i$ é uma rede em X_i para todo $i \in I$.
- (b) Seja $p \in \prod_{i \in I} X_i$. Mostre que a rede x converge para p se, e somente se, para cada $i \in I$, a rede $(\pi_i \circ x): N \rightarrow X_i$ converge para $\pi_i(p) = p(i)$.

Resolução (Angie). (a) Para verificar que $\pi_i \circ x$ é uma rede em X_i , basta observar que N um conjunto dirigido e que $x: N \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ e $\pi_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ são funções.

- (b) $(\Rightarrow)$: Se uma rede x convergir para um ponto p em $\prod_{i \in I} X_i$, então a rede $\pi_i \circ x$ converge para $\pi_i(p) = p(i)$ em X_i , pois cada π_i é contínua (ver Proposição 9.5(a) e Proposição 13.5).

$(\Leftarrow)$: Suponha que as redes $\pi_i \circ x$ convirjam para os pontos p_i em X_i , para todo $i \in I$. Queremos mostrar que a rede x converge para o ponto p em $\prod_{i \in I} X_i$ dado por $p(i) = p_i$. Para isso, comece fixando uma vizinhança V de p em $\prod_{i \in I} X_i$. Pela definição de vizinhança (Definição 4.1) e da topologia produto (Definição 9.2), existem abertos A_i em X_i tais que $A_i \neq X_i$ para uma quantidade finita de índices i e $p \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq V$. Como $p \in \prod_{i \in I} A_i$, então $p(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Em particular, A_i é uma vizinhança de p_i . Daí e da hipótese que a rede $\pi_i \circ x$ converge para p_i , segue que existe $n_i \in N$ tal que $(\pi_i \circ x)(n) = x(n)(i) \in A_i$ para todo $n \in N$ tal que $n_i \leq n$. Agora, lembre que $A_i \neq X_i$ para uma quantidade finita de índices i e denote por K o subconjunto de índices $\{i \in I \mid A_i \neq X_i\}$. Como N é um conjunto dirigido, existe $n_0 \in N$ tal que $n_k \leq n_0$ para todo $k \in K$ (ver Exercício 12.3). Assim, para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$, teremos que: $x(n)(k) \in A_k$ para todo $k \in K$; e $x(n)(i) \in X_i = A_i$ para todo $i \in I, i \notin K$. Isso mostra $x(n) \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq V$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$. Portanto, a rede x converge para p . $\square$

Exercício 13.4. Seja (X, τ) um espaço topológico.

- (a) Suponha que X seja um conjunto finito. Mostre que, se τ não é a topologia discreta, então existe uma rede que converge para mais de um ponto em X .
- (b) Mostre que existe uma rede não constante que converge simultaneamente para dois (ou mais) pontos distintos em X se, e somente se, existe um subconjunto $S \subseteq X$ que tem pelo menos dois elementos e, para todo $s \in S$, toda vizinhança de s contém S .

AULA 14

Nesta aula, introduziremos o conceito de *filtro* e estudaremos *convergências de filtros* em espaços topológicos. Os filtros oferecem uma perspectiva alternativa às redes em relação a convergência. Ao longo da aula, estabeleceremos os principais resultados técnicos que relacionam filtros com fecho de conjuntos e com continuidade de funções.

14.1. Filtros. Dado um espaço topológico, as vizinhanças de um ponto nesse espaço descrevem a estrutura local dele em torno do ponto. Conforme vimos na Aula 4, os sistemas de vizinhanças desses pontos satisfazem duas propriedades algébricas fundamentais: são fechadas por interseções finitas e por superconjuntos. A noção abstrata que captura exatamente essas duas propriedades, sem referência a nenhum espaço topológico subjacente, é a de *filtro*. Nesta primeira parte da aula, definiremos filtros e bases de filtros, apresentaremos os primeiros exemplos e estabeleceremos um critério prático para reconhecer bases de filtros.

Definição 14.1 (de filtro e de base de filtro). Dado um conjunto não vazio X , um *filtro* em X é uma família própria de subconjuntos, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, satisfazendo:

- (i) Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- (ii) Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Uma *base de filtro* em X é uma família de subconjuntos, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, tal que

$$(\mathcal{B}) := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid B \subseteq A \text{ para algum } B \in \mathcal{B}\}$$

é um filtro em X . Neste caso, $(\mathcal{B})$ é chamado de *filtro gerado por $\mathcal{B}$* .

Observe que todo filtro em X contém o subconjunto X . De fato, se $\mathcal{F}$ é um filtro em X , então $\mathcal{F}$ é uma família não vazia de subconjuntos de X . Ou seja, existe $S \in \mathcal{F}$. Como $S \subseteq X$, segue da condição (ii) da Definição 14.1 que $X \in \mathcal{F}$. Observe também que toda subfamília de $\mathcal{P}(X)$ que contém o subconjunto vazio não é uma base de filtro em X . De fato, se $\emptyset$ pertencesse a um filtro, pela condição (ii) da Definição 14.1, todo subconjunto de X pertenceria a esse filtro. Isso faria com que o filtro não fosse uma subfamília própria de $\mathcal{P}(X)$. Analogamente, toda subfamília de $\mathcal{P}(X)$ que contém subconjuntos disjuntos entre si tampouco é uma base de filtro em X (pelas condições (i) e (ii) da Definição 14.1).

Essas observações estabelecem as restrições mais imediatas sobre quais famílias podem ser filtros. Para desenvolver mais intuição sobre esses conceitos, vejamos como eles se manifestam em conjuntos pequenos.

Exemplo 14.2. Considere um conjunto $X = \{\bullet\}$ com um elemento. Neste caso, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X\}$. Assim, o único filtro em X é $\{X\}$, pois toda outra subfamília de $\mathcal{P}(X)$ contém o subconjunto $\emptyset$.

No exemplo acima, a unicidade do filtro decorre do fato de X ter apenas um elemento. Quando X tem dois elementos, surgem mais possibilidades.

Exemplo 14.3. Considere um conjunto $X = \{a, b\}$ com dois elementos. Neste caso, observe que $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ e que os filtros em X são:

$$\{\{a\}, X\}, \quad \{\{b\}, X\} \quad \text{e} \quad \{X\},$$

pois todas as outras contêm o conjunto vazio, ou subconjuntos disjuntos, ou não contêm X .

O próximo exemplo apresenta as bases de filtros mais simples de serem construídas.

Exemplo 14.4. Dado um conjunto não vazio X , para todo subconjunto não vazio S de X , a subfamília $\mathbf{B} = \{S\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma base de filtro em X . De fato, $(\mathbf{B}) = \{Y \subseteq X \mid S \subseteq Y\}$ é um filtro em X :

- (i) Se $S \subseteq Y_1, Y_2$, então $S \subseteq Y_1 \cap Y_2$;
- (ii) se $S \subseteq Y_1$ e $Y_1 \subseteq Y_2$, então $S \subseteq Y_2$.

Esses filtros $(\{S\})$, com $S \neq \emptyset$, são chamados de **principais**.

O próximo exemplo conecta a teoria abstrata de filtros à topologia: ele mostra que os sistemas de vizinhanças de pontos em espaços topológicos são filtros.

Exemplo 14.5. Considere um espaço topológico (X, τ) . Lembre do Lema 4.7 que, para cada $x \in X$, o sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ forma um filtro em X . Além disso, toda base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ de x é uma base de filtro em X com $(\mathcal{B}_x) = \mathcal{U}_x$. De fato, pela Definição 4.8, para todo $U \in \mathcal{U}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq U$. Isso mostra que $\mathcal{U}_x \subseteq (\mathcal{B}_x)$. Por outro lado, $B \in \mathcal{B}_x$ e $B \subseteq Y$, então $x \in B^\circ \subseteq Y^\circ$. Isso implica que $Y \in \mathcal{U}_x$ e mostra que $(\mathcal{B}_x) \subseteq \mathcal{U}_x$.

Os exemplos anteriores sugerem que há uma maneira mais simples de verificar se uma família é uma base de filtro, sem precisar calcular explicitamente o filtro gerado. O lema a seguir fornece exatamente esse critério.

Lema 14.6. Seja X um conjunto não vazio. Uma subfamília própria $\mathbf{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma base de filtro em X se, e somente se, $\emptyset \notin \mathbf{B}$ e, para todos $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$, existe $B_3 \in \mathbf{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Demonstração. Vamos começar demonstrando a parte *somente se*. Para isso, suponha que $\mathbf{B}$ seja uma base de filtro em X . Como observado acima, $\emptyset \notin \mathbf{B}$. Além disso, pela Definição 14.1, $(\mathbf{B})$ é um filtro em X . Assim, se $B_1, B_2 \in \mathbf{B} \subseteq (\mathbf{B})$, então $B_1 \cap B_2 \in (\mathbf{B})$. Ou seja, existe $B_3 \in \mathbf{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Agora vamos demonstrar a parte *se*. Para isso, suponha que $\emptyset \notin \mathbf{B}$ e que, para todos $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$, existe $B_3 \in \mathbf{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Queremos mostrar que $(\mathbf{B})$ é um filtro em X . Primeiro, observe que $(\mathbf{B}) \neq \mathcal{P}(X)$, pois $\emptyset \in (\mathbf{B})$. Agora vamos verificar que $(\mathbf{B})$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 14.1:

- (i) Se $Y_1, Y_2 \in (\mathbf{B})$, então existem $B_1, B_2 \in \mathbf{B}$ tais que $B_1 \subseteq Y_1$ e $B_2 \subseteq Y_2$. Por hipótese, existe $B_3 \in \mathbf{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2$. Isso implica que $Y_1 \cap Y_2 \in (\mathbf{B})$.

- (ii) Se $Y_1 \in (\mathbf{B})$ e $Y_1 \subseteq Y_2$, então existe $B \in \mathbf{B}$ tal que $B \subseteq Y_1$. Como $Y_1 \subseteq Y_2$, isso implica que $B \subseteq Y_2$ e, conseqüentemente, que $Y_2 \in (\mathbf{B})$. $\square$

Agora que nós definimos filtros e bases de filtros, vamos definir suas convergências. Enquanto redes generalizam sequências indexando-as por conjuntos dirigidos, filtros capturam a mesma ideia de forma dual: em vez de especificar os termos da rede, especificamos os conjuntos que contêm todos os termos a partir de certo ponto.

Definição 14.7 (de convergência de filtro). Dados um espaço topológico X , uma base de filtro $\mathbf{B}$ em X , um filtro $\mathbf{F}$ em X e um ponto $p \in X$, dizemos que $\mathbf{F}$ converge para p quando $\mathcal{U}_p \subseteq \mathbf{F}$, e dizemos que $\mathbf{B}$ converge para p quando, para todo $U \in \mathcal{U}_p$, existe $B \in \mathbf{B}$ tal que $B \subseteq U$.

A definição é uma formalização da ideia de que convergir para um ponto p significa “se aproximar” de p no sentido de caberem em qualquer vizinhança de p . Os exemplos a seguir ilustram essa noção em casos concretos.

Exemplo 14.8. Considere um espaço topológico não vazio X . Lembre do Exemplo 14.5 que, para todo $x \in X$, o sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ é um filtro em X . Pela Definição 14.7, $\mathcal{U}_x$ é o menor filtro (no sentido da inclusão) que converge para x : qualquer filtro $\mathbf{F}$ que converge para x deve satisfazer $\mathcal{U}_x \subseteq \mathbf{F}$.

O próximo exemplo mostra um filtro pode convergir para mais de um ponto simultaneamente.

Exemplo 14.9. Considere o conjunto $X = \{a, b\}$ munido da topologia de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Lembre que $\mathcal{U}_a = \{\{a\}, X\}$ e $\mathcal{U}_b = \{X\}$. Vamos analisar quais dos filtros em X convergem para quais pontos (ver Exemplo 14.3):

- $\mathbf{F} = \{\{a\}, X\}$ é um filtro que converge para a (pois $\mathcal{U}_a = \mathbf{F}$) e também converge para b (pois $\mathcal{U}_b = \{X\} \subseteq \mathbf{F}$).
- $\mathbf{F} = \{\{b\}, X\}$ é um filtro que converge para b (pois $\mathcal{U}_b = \{X\} \subseteq \mathbf{F}$), mas não converge para a (pois $\{a\} \in \mathcal{U}_a$ e $\{a\} \notin \mathbf{F}$).
- $\mathbf{F} = \{X\}$ é um filtro em X que converge para b (pois $\mathcal{U}_b = \{X\} \subseteq \mathbf{F}$), mas não converge para a (pois $\{a\} \in \mathcal{U}_a$ e $\{a\} \notin \mathbf{F}$).

Os exemplos acima mostram que a convergência de um filtro em um espaço topológico depende não só do filtro, mas também da topologia do espaço. O lema a seguir fornece dois critérios técnicos que serão úteis nas demonstrações subsequentes: o primeiro diz que um filtro “mais fino” herda a convergência e o segundo diz que um filtro e sua base de filtro convergem ou não convergem simultaneamente.

Lema 14.10. Sejam X um espaço topológico não vazio, $\mathbf{B}$ uma base de filtro em X e p um ponto em X .

- (a) Se $\mathbf{B}$ converge para p e $\mathbf{B}'$ é uma base de filtro em X tal que, para todo $B \in \mathbf{B}$, existe $B' \in \mathbf{B}'$ satisfazendo $B' \subseteq B$, então $\mathbf{B}'$ converge para p .
- (b) O filtro $(\mathbf{B})$ converge para p se, e somente se, a base $\mathbf{B}$ converge para p .

- Demonstração.* (a) Dado $U \in \mathcal{U}_p$, queremos mostrar que existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $B' \subseteq U$. Para isso, comece observando que, como $\mathcal{B}$ converge para p , então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Depois, lembre que, por hipótese, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $B' \subseteq B \subseteq U$. Isso mostra que existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $B' \subseteq U$ e, consequentemente, que $\mathcal{B}'$ converge para p .
- (b) Para demonstrar a parte *somente se*, suponha que $(\mathcal{B})$ convirja para p , ou seja, suponha que $\mathcal{U}_p \subseteq (\mathcal{B})$. Isso significa que, para toda $U \in \mathcal{U}_p$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Portanto, $\mathcal{B}$ converge para p . Agora, para demonstrar a parte *se*, suponha que $\mathcal{B}$ convirja para p . Isso significa que, para toda $U \in \mathcal{U}_p$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Portanto, $\mathcal{U}_p \subseteq (\mathcal{B})$, ou seja, $(\mathcal{B})$ converge para p . $\square$

O lema anterior mostra, em particular, que a convergência de um filtro e a de qualquer uma de suas bases são equivalentes. Isso torna as bases de vizinhanças especialmente convenientes como bases de filtros: o exemplo a seguir confirma que qualquer base de vizinhanças de um ponto converge para esse ponto e que qualquer base de filtro mais fina também converge.

Exemplo 14.11. Considere um espaço topológico não vazio X e um ponto $x \in X$. Lembre do Exemplo 14.5 que toda base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ de x é uma base de filtro em X , com $(\mathcal{B}_x) = \mathcal{U}_x$. Segue do Lema 14.10(b) que $\mathcal{B}_x$ converge para x . Além disso, pelo Lema 14.10(a), toda base de filtro $\mathcal{B}$ em X tal que, para todo $B \in \mathcal{B}$, existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que $B' \subseteq B$, também converge para x .

Agora que nós definimos filtros, bases de filtros e quando eles convergem, vamos estabelecer os dois resultados principais que conectam a teoria de filtros ao restante da topologia geral. O primeiro relaciona a convergência de filtros com a operação de fecho: um ponto pertence ao fecho de um conjunto Y se, e somente se, existe um filtro contendo Y que converge para esse ponto. O segundo mostra que a continuidade de uma função equivale a preservar a convergência de bases de filtros.

Proposição 14.12. Sejam X um espaço topológico não vazio e Y um subconjunto de X . Um ponto $p \in X$ pertence a $\overline{Y}$ se, e somente se, existe um filtro $\mathcal{F}$ em X tal que $Y \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ converge para p .

Demonstração. Para começar, observe que, se $Y = \emptyset$, então $\overline{Y} = \emptyset$. Assim, nesse caso, não existem pontos pertencentes a $\overline{Y}$ e não existem filtros que contêm Y . Assim, para o restante dessa demonstração, nós vamos supor que $Y \neq \emptyset$.

Agora vamos demonstrar a parte *somente se*. Para isso, suponha que $Y \neq \emptyset$ e que $p \in \overline{Y}$. Vamos mostrar que $\mathcal{B} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{U}_p\}$ é uma base de filtro em X que converge para p . Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , comece observando que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. De fato, como $p \in \overline{Y}$, pela Proposição 5.16 temos que $U \cap Y \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{U}_p$. Observe também que, se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ também. De fato, se $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_p$ forem vizinhanças de p tais que $B_1 = U_1 \cap Y$ e $B_2 = U_2 \cap Y$, teremos que $B_1 \cap B_2 = (U_1 \cap U_2) \cap Y$. Como $U_1 \cap U_2$ também é uma vizinhança de p (ver Lema 4.7(a)), concluímos que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Pelo Lema 14.6, isso implica que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X . Para mostrar que $\mathcal{B}$ converge para p , basta notar

que, para toda $U \in \mathcal{U}_p$, temos que $U \cap Y \in \mathcal{B}$ e $U \cap Y \subseteq U$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de filtro que converge para p , segue do Lema 14.10(b) que $(\mathcal{B})$ é um filtro que converge para p .

Agora vamos demonstrar a parte *se*. Para isso, suponha que $\mathcal{F}$ seja um filtro em X que converge para p e tal que $Y \in \mathcal{F}$. Pela Definição 14.7, temos que $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{F}$, ou seja, que $U \in \mathcal{F}$ para todo $U \in \mathcal{U}_p$. Daí, da hipótese que $Y \in \mathcal{F}$ e da Definição 14.1, segue que $U \cap Y \in \mathcal{F}$ e, consequentemente, que $U \cap Y \neq \emptyset$, para toda $U \in \mathcal{U}_p$. Pela Proposição 5.16, isso implica que $p \in \overline{Y}$. $\square$

A proposição anterior caracteriza o fecho em termos de convergência de filtros. A proposição a seguir estabelece um resultado análogo para continuidade, mostrando que uma função é contínua em um ponto se, e somente se, preserva a convergência das bases de filtros que convergem para esse ponto.

Proposição 14.13. Sejam X e Y dois espaços topológicos, x um ponto de X e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

- (a) Se $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , então $f(\mathcal{B}) := \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de filtro em Y .
- (b) A função f é contínua em x se, e somente se, para toda base de filtro $\mathcal{B}$ em X que converge para x , a base de filtro $f(\mathcal{B})$ converge para $f(x)$.

Demonstração. (a) Para mostrar que $f(\mathcal{B})$ é uma base de filtro em Y , vamos usar o Lema 14.6. Para verificar que $\emptyset \notin f(\mathcal{B})$, comece observando que $f(B) = \emptyset$ se, e somente se, $B = \emptyset$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , segue que $\emptyset \notin \mathcal{B}$ e, consequentemente, que $\emptyset \notin f(\mathcal{B})$. Agora vamos mostrar que, se $C_1, C_2 \in f(\mathcal{B})$, então existe $C_3 \in f(\mathcal{B})$ tal que $C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$. Para isso, fixe $C_1, C_2 \in f(\mathcal{B})$ e escolha $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tais que $C_1 = f(B_1)$ e $C_2 = f(B_2)$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de filtro, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Tomando $C_3 := f(B_3)$, temos:

$$C_3 = f(B_3) \subseteq f(B_1 \cap B_2) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2) = C_1 \cap C_2.$$

Isso garante que $f(\mathcal{B})$ é uma base de filtro em Y .

- (b) Vamos começar mostrando a parte *somente se*. Para isso, suponha que f é uma função contínua em x e fixe uma base de filtro $\mathcal{B}$ que converge para x . Queremos mostrar que a base de filtro $f(\mathcal{B})$ converge para $f(x)$. Pelo Lema 6.5, para todo $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq V$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de filtro que converge para x , também existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Assim, para todo $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $f(B) \subseteq V$. Isso significa que $f(\mathcal{B})$ converge para $f(x)$.

Agora vamos mostrar a parte *se*. Para isso, suponha que, para toda base de filtro $\mathcal{B}$ que converge para x , a base de filtro $f(\mathcal{B})$ converge para $f(x)$. Como $\mathcal{U}_x$ é uma base de filtro em X que converge para x (ver Exemplo 14.11), por hipótese, $f(\mathcal{U}_x)$ converge para $f(x)$. Ou seja, para todo $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq V$. Pelo Lema 6.5, isso significa que a função f é contínua em x . $\square$

Vamos concluir essa aula propondo alguns exercícios que exploram a relação entre filtros e outras estruturas topológicas estudadas anteriormente. Os três primeiros tratam de subespaços, produtos e quocientes, respectivamente. Os dois últimos estabelecem a equivalência entre redes e filtros.

Exercício 14.1. Sejam X um espaço topológico, Y um subespaço topológico de X e p um ponto de Y .

- Se $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em Y que converge para p , mostre que $\mathcal{B}$ também é uma base de filtro em X que converge para p .
- Se $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X tal que $B \cap Y \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}$, mostre que $\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de filtro em Y .
- Se $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X que converge para p e tal que $B \cap Y \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}$, mostre que $\mathcal{B}_Y$ também converge para p .

Resolução (Daniel). (a) Seja $\mathcal{B}$ uma base de filtro em Y que converge para p . Pelo Lema 14.6 e pela Definição 14.7, isso significa que:

- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ e $\emptyset \notin \mathcal{B}$,
- para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,
- para toda vizinhança $U \in \mathcal{U}_{p,Y}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$.

Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , comece observando que, como Y é um subconjunto de X , então $\mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X)$. Daí e dos dois primeiros pontos acima, obtemos: que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, que $\emptyset \notin \mathcal{B}$ e que, para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Pelo Lema 14.6, isso significa que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X .

Para mostrar que essa base de filtro também converge para p em X , precisamos mostrar que, para toda vizinhança $V \in \mathcal{U}_{p,X}$ de p em X , existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V$. Para isso, comece fixando uma vizinhança $V \in \mathcal{U}_{p,X}$. Pela Proposição 7.8(b), $V \cap Y$ é uma vizinhança de p em Y . Daí e do terceiro ponto acima, segue que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq V \cap Y$. Consequentemente, $B \subseteq V$. Isso mostra que $\mathcal{B}$ converge para p em X também.

- Para mostrar que $\mathcal{B}_Y$ é uma base de filtro em Y , comece observando que $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$ por definição, e que $\emptyset \notin \mathcal{B}_Y$ por hipótese. Agora, vamos mostrar que, para todos $C_1, C_2 \in \mathcal{B}_Y$, existe $C_3 \in \mathcal{B}_Y$ tal que $C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$. Pelo Lema 14.6, isso implicará que $\mathcal{B}_Y$ é uma base de filtro em Y .

Dados $C_1, C_2 \in \mathcal{B}_Y$, existem $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tais que, $C_1 = B_1 \cap Y$ e $C_2 = B_2 \cap Y$ (pela definição de $\mathcal{B}_Y$). Como $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , pelo Lema 14.6, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Assim, se definirmos $C_3 := B_3 \cap Y$, teremos que $C_3 \in \mathcal{B}_Y$ e

$$C_3 = B_3 \cap Y \subseteq (B_1 \cap B_2) \cap Y = (B_1 \cap Y) \cap (B_2 \cap Y) = C_1 \cap C_2.$$

Pelo Lema 14.6, isso implica que $\mathcal{B}_Y$ é uma base de filtro em Y .

- Pelo item (b), $\mathcal{B}_Y$ é uma base de filtro em Y . Vamos mostrar que, se $\mathcal{B}$ converge para $p \in Y$, então $\mathcal{B}_Y$ também converge para p . Para isso, precisamos mostrar

que, para toda vizinhança $V \in \mathcal{U}_{p,Y}$, existe $C \in \mathcal{B}_Y$ tal que $C \subseteq V$. Assim, comece fixando $V \in \mathcal{U}_{p,Y}$. Pela Proposição 7.8(b), existe uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_{p,X}$ tal que $V = U \cap Y$. Como a base de filtro $\mathcal{B}$ converge para p em X (por hipótese), existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. Assim, se definirmos $C := B \cap Y$, teremos que $C \in \mathcal{B}_Y$ e $C = B \cap Y \subseteq U \cap Y = V$. Isso mostra que a base de filtro $\mathcal{B}_Y$ converge para p em Y . $\square$

Exercício 14.2. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e $X = \prod_{i \in I} X_i$ o espaço produto.

- (a) Mostre que, se $\mathcal{B}_i$ for uma base de filtro em X_i que converge para um ponto $x_i \in X_i$ para cada $i \in I$, então $\mathcal{B} := \{\prod_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B}_i \text{ para todo } i \in I\}$ é uma base de filtro em X que converge para o ponto $\chi \in X$ dado por $\chi(i) = x_i$ para todo $i \in I$.
- (b) Mostre que, se $\mathcal{B}$ for uma base de filtro em X que converge para um ponto $\chi \in X$, então $\pi_i(\mathcal{B}) := \{\pi_i(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de filtro em X_i que converge para o ponto $\chi(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.

Resolução. (a) Primeiro mostramos que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X usando o Lema 14.6. Como $\emptyset \notin \mathcal{B}_i$ para todo $i \in I$, temos $\prod_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ para quaisquer $B_i \in \mathcal{B}_i$, logo $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Dados $\prod_{i \in I} B_{i,1}$ e $\prod_{i \in I} B_{i,2}$ em $\mathcal{B}$, como cada $\mathcal{B}_i$ é uma base de filtro, existe $B_{i,3} \in \mathcal{B}_i$ tal que $B_{i,3} \subseteq B_{i,1} \cap B_{i,2}$ para cada $i \in I$. Então $\prod_{i \in I} B_{i,3} \in \mathcal{B}$ e $\prod_{i \in I} B_{i,3} \subseteq \prod_{i \in I} (B_{i,1} \cap B_{i,2}) = (\prod_{i \in I} B_{i,1}) \cap (\prod_{i \in I} B_{i,2})$. Portanto, $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X .

Agora mostramos que $\mathcal{B}$ converge para χ . Dada $U \in \mathcal{U}_\chi$, como a topologia produto tem abertos básicos da forma $\prod_{i \in I} A_i$ onde $A_i = X_i$ para todo i exceto em um conjunto finito $J \subseteq I$, existe tal produto aberto com $\chi \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq U$, onde A_i é aberto em X_i para todo $i \in J$ e $A_i = X_i$ para $i \notin J$. Como $x_i = \chi(i) \in A_i$ e cada A_i é aberto, $A_i \in \mathcal{U}_{x_i}$ para $i \in J$. Como $\mathcal{B}_i$ converge para x_i , existe $B_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $B_i \subseteq A_i$ para $i \in J$; para $i \notin J$, tome $B_i \in \mathcal{B}_i$ qualquer. Então $\prod_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}$ e $\prod_{i \in I} B_i \subseteq \prod_{i \in I} A_i \subseteq U$. Portanto, $\mathcal{B}$ converge para χ .

- (b) O fato de que $\pi_i(\mathcal{B})$ é uma base de filtro em X_i segue da Proposição 14.13(a). Para mostrar que $\pi_i(\mathcal{B})$ converge para $\chi(i)$, fixe $i \in I$ e $U_i \in \mathcal{U}_{\chi(i)}$. Logo, o conjunto $\pi_i^{-1}(U_i) = U_i \times \prod_{j \neq i} X_j$ é uma vizinhança de χ em X . Como $\mathcal{B}$ converge para χ , existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq \pi_i^{-1}(U_i)$, e portanto $\pi_i(B) \subseteq U_i$. Logo $\pi_i(\mathcal{B})$ converge para $\chi(i)$. $\square$

Exercício 14.3 (Israel). Sejam X e Y dois espaços topológicos e $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente.

- (a) Mostre que, se $\mathcal{B}$ for uma base de filtro em X que converge para um ponto x , então $p(\mathcal{B})$ é uma base de um filtro em Y que converge para $p(x)$.
- (b) Sejam $y \in Y$ e $x \in X$ tal que $p(x) = y$. Dada uma base de filtro $\mathcal{B}$ em Y que converge para $y \in Y$, construa uma base de filtro $\tilde{\mathcal{B}}$ em X que convirja para x .

Exercício 14.4. Sejam $(N, \leq)$ um conjunto dirigido não vazio, X um espaço topológico não vazio, e $x : N \rightarrow X$ uma rede em X .

- (a) Para cada $n \in N$, defina $B_n := \{x(m) \mid m \geq n\}$. Mostre que $\mathcal{B} := \{B_n \mid n \in N\}$ é uma base de filtro em X .
- (b) Dado $p \in X$, mostre que a rede x converge para p se, e somente se, a base de filtro $\mathcal{B}$ converge para p .

Resolução (Mateus). (a) Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , vamos mostrar que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, que $\emptyset \notin \mathcal{B}$ e que, para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Pelo Lema 14.6, isso implicará que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X .

Como N é um conjunto não vazio, então a família $\mathcal{B}$ também é não vazia. Além disso, como $X, N \neq \emptyset$, x é uma função $N \rightarrow X$ e $\leq$ é uma pré-ordem em N , então $B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in N$. Agora sejam $n_1, n_2 \in N$. Para construir $n_3 \in N$ tal que $B_{n_3} \subseteq B_{n_1} \cap B_{n_2}$, lembre da definição de conjunto dirigido existe $l \in N$ tal que $n_1 \leq l$ e $n_2 \leq l$. Observe que, se $x(m) \in B_l$, então $n_1 \leq l \leq m$ e $n_2 \leq l \leq m$. Daí e da transitividade de $\leq$, segue que $x(m) \in B_{n_1}$ e $x(m) \in B_{n_2}$. Assim, se tomarmos $n_3 = l$, obtemos que $B_{n_3} \subseteq B_{n_1} \cap B_{n_2}$. Dessa forma, segue do Lema 14.6 que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X .

- (b) ($\Rightarrow$): Suponha que a rede x converge para um ponto p em X . Por definição, isso significa que, para toda vizinhança V de p , existe $n_0 \in N$ tal que $x(n) \in V$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$; ou seja, tal que $B_{n_0} = \{x(n) \mid n_0 \leq n\} \subseteq V$. Portanto, pela Definição 14.7, a base de filtro $\mathcal{B}$ converge para p .

($\Leftarrow$): Suponha que a base de filtro $\mathcal{B}$ converge para um ponto p em X . Por definição, isso significa que, para toda vizinhança V de p , existe $n \in N$ tal que $B_n \subseteq V$. Como $B_n = \{x(m) \mid n \leq m\}$, a inclusão $B_n \subseteq V$ significa exatamente que $x(m) \in V$ para todo $m \in N$ tal que $n \leq m$. Ou seja, para toda vizinhança V de p , existe $n \in N$ tal que $x(m) \in V$ para todo $m \in N$ tal que $n \leq m$. Por definição, isso significa que a rede x converge para p . $\square$

Exercício 14.5. Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base de filtro em X .

- (a) Considere o conjunto $N := \{(b, B) \mid b \in B \text{ e } B \in \mathcal{B}\}$, munido da relação:

$$(b, B) \leq (b', B') \iff B \supseteq B'.$$

Mostre que $(N, \leq)$ é um conjunto dirigido.

- (b) Considere um ponto $p \in X$ e a rede $x : N \rightarrow X$ dada por $x(b, B) = b$ para todo $(b, B) \in N$. Mostre que a base de filtro $\mathcal{B}$ converge para p se, e somente se, x converge para p .

Resolução (Roger). (a) Para mostrar que o par $(N, \leq)$ é um conjunto dirigido, precisamos mostrar que a relação $\leq$ satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 12.7.

- (i) Para todo $(b, B) \in N$, temos que $(b, B) \leq (b, B)$, porque $B \subseteq B$.

(ii) Se $(b, B), (b', B'), (b'', B'') \in N$ forem tais que $(b, B) \leq (b', B') \leq (b'', B'')$, então $B'' \subseteq B' \subseteq B$. Isso implica que $B'' \subseteq B$ e, consequentemente, que $(b, B) \leq (b'', B'')$.

(iii) Sejam (b_1, B_1) e $(b_2, B_2) \in N$. Como $\mathbf{B}$ é uma base de filtro em X , existe $B_3 \in \mathbf{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Além disso, como $\mathbf{B}$ é uma base de filtro em X , então $B_3 \neq \emptyset$, ou seja, existe algum elemento $b_3 \in B_3$. Assim, temos que $(b_3, B_3) \in N$, $(b_1, B_1) \leq (b_3, B_3)$ e $(b_2, B_2) \leq (b_3, B_3)$.

Isso mostra que a relação $\leq$ satisfaz as condições (i)-(iii) da Definição 12.7 e, consequentemente, que $(N, \leq)$ é um conjunto dirigido.

(b) $(\Rightarrow)$: Suponha que a base de filtro $\mathbf{B}$ converge para p . Queremos mostrar que a rede x também converge para p , ou seja, queremos mostrar que, para toda vizinhança V de p , existe $n_0 \in N$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$. Para isso, comece fixando uma vizinhança V de p . Como o filtro $\mathbf{B}$ converge para p , existe $B \in \mathbf{B}$ tal que $B \subseteq V$. Além disso, como $\mathbf{B}$ é uma base de filtro em X , tal B é não vazio, ou seja, existe algum elemento $b \in B$. Assim, se tomarmos $n_0 := (b, B)$, teremos que: $n_0 \in N$ (porque $b \in B \in \mathbf{B}$) e, se $n = (b', B') \in N$ for tal que $n_0 \leq n$, então $x_n = b' \in B' \subseteq B \subseteq V$. Isso mostra que a rede x converge para p .

$(\Leftarrow)$: Suponha que a rede x converge para p . Queremos mostrar que a base de filtro $\mathbf{B}$ também converge para p , ou seja, queremos mostrar que, para todo $U \in \mathcal{U}_p$, existe $B \in \mathbf{B}$ tal que $B \subseteq U$. Para isso, comece fixando $U \in \mathcal{U}_p$. Como a rede $x : N \rightarrow X$ converge para p , existe $n_0 \in N$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$. Denote n_0 por (b, B) . Para mostrar que $B \subseteq U$, comece observando que $n_0 \leq (b', B)$ para todo $b' \in B$ (porque $B \subseteq B$). Isso implica que $b' = x_{(b', B)} \in U$ para todo $b' \in B$, ou seja, que $B \subseteq U$. Isso mostra que a base de filtro $\mathbf{B}$ converge para p . $\square$

AULA 15

Nesta aula, estudaremos o primeiro *axioma de separação*: condições adicionais que podem ser impostas a um espaço topológico para controlar como seus pontos são separados pela topologia. O axioma mais elementares, T_0 , exige que, para quaisquer dois pontos distintos exista ao menos uma vizinhança que os separa, ou que cada ponto possua uma vizinhança que exclui o outro. Veremos o axioma T_0 de forma mais precisa, o ilustraremos com exemplos concretos, e estudaremos como ele se comporta sob a restrição a subespaços, sob o produto de espaços e sob a imagem de funções.

15.1. Espaços T_0 . A condição T_0 é o axioma de separação mais fraco. Ele pede apenas que, dados dois pontos distintos, ao menos um deles possua uma vizinhança que não contém o outro. Embora fraca, essa condição já exclui espaços como o munido da topologia trivial (em que nenhum ponto pode ser separado do outro), e será a base sobre a qual os axiomas mais fortes serão construídos ao longo das próximas aulas.

Definição 15.1 (de espaço T_0). Um espaço topológico não vazio X é dito T_0 quando: para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \notin U$, ou existe $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $x \notin V$.

Os exemplos a seguir ilustram quais espaços satisfazem (ou não) a condição T_0 . Começamos com os casos mais simples, que já conhecemos: os espaços com dois pontos.

Exemplo 15.2. Considere um conjunto com dois elementos, $X = \{a, b\}$. Lembre que, a menos de homeomorfismos, as únicas topologias em X são: a trivial, a de Sierpinski e a discreta. Vamos determinar quais delas são T_0 :

- Topologia trivial. Lembre que, neste caso, a topologia em X é $\tau = \{\emptyset, X\}$ e os sistemas de vizinhanças dos elementos de X são $\mathcal{U}_a = \{X\}$ e $\mathcal{U}_b = \{X\}$. Como a única vizinhança de a é uma vizinhança de b e a única vizinhança de b é uma vizinhança de a , então X munido da topologia trivial não é um espaço T_0 .
- Topologia de Sierpinski. Considere a topologia de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Observe que $\mathcal{U}_a = \{\{a\}, X\}$ e $\mathcal{U}_b = \{X\}$. Como $\{a\} \in \mathcal{U}_a$ e $b \notin \{a\}$, a condição T_0 é satisfeita para $x = a$ e $y = b$. Logo X munido da topologia de Sierpinski é um espaço T_0 .
- Topologia discreta. Lembre que, neste caso, $\{a\} \in \mathcal{U}_a$ e $b \notin \{a\}$. Analogamente, $\{b\} \in \mathcal{U}_b$ e $a \notin \{b\}$. Logo, X munido da topologia discreta é um espaço T_0 .

O exemplo acima, além de verificar quais topologias no conjunto com dois elementos satisfaz o axioma T_0 , mostra que esse axioma de separabilidade não exige simetria na separação: no espaço de Sierpinski, é o ponto a que se distingue de b , mas não o contrário. O resultado a seguir estabelece caracterizações alternativas para um espaço topológico ser T_0 .

Proposição 15.3. Seja X um espaço topológico não vazio. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) X é T_0 .
- (b) para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, temos que $\mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y$.
- (c) para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, temos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Se X for um espaço topológico T_0 , então, para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \notin \mathcal{U}_y$, ou existe $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $V \notin \mathcal{U}_x$. No primeiro caso, teríamos que $U \in \mathcal{U}_x \setminus \mathcal{U}_y$, e no segundo caso, teríamos que $V \in \mathcal{U}_y \setminus \mathcal{U}_x$. Em ambos os casos, temos que $\mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sejam x e y dois pontos distintos de X e suponha que $\mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y$. Isso significa que existe $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \notin \mathcal{U}_y$, ou existe $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $V \notin \mathcal{U}_x$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que seja o primeiro caso e vamos escolher $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \notin \mathcal{U}_y$. Como $U \notin \mathcal{U}_y$, então $y \notin U^\circ$. Ou seja, U° é uma vizinhança de x tal que $U^\circ \cap \{y\} = \emptyset$. Pela Proposição 5.16, isso implica que $x \notin \overline{\{y\}}$. Como $x \in \{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$ e $x \notin \overline{\{y\}}$, concluímos que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sejam x e y dois pontos distintos de X e suponha que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Isso significa que existe $z \in \overline{\{x\}}$ tal que $z \notin \overline{\{y\}}$, ou existe $z \in \overline{\{y\}}$ tal que $z \notin \overline{\{x\}}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que seja o primeiro caso e vamos fixar um elemento $z \in \overline{\{x\}}$ tal que $z \notin \overline{\{y\}}$. Como $\overline{\{y\}}$ é fechado, então $A := X \setminus \overline{\{y\}}$ é aberto em X . Além disso, como $z \notin \overline{\{y\}}$, então $z \in A$. Em particular, A é uma vizinhança de z . Daí, do fato que $z \in \overline{\{x\}}$ e da Proposição 5.16, segue que $A \cap \{x\} \neq \emptyset$, ou seja, $x \in A$. Portanto, A é uma vizinhança de x que não contém y . Isso garante que X é um espaço T_0 . $\square$

O resultado a seguir mostra que ser T_0 é uma propriedade estável sob subespaços e produtos.

Proposição 15.4. (a) Sejam X um espaço topológico não vazio e S um subespaço topológico não vazio de X . Se X é T_0 , então S também é T_0 .

- (b) Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço topológico produto $\prod_{i \in I} X_i$ é T_0 se, e somente se, os espaços topológicos X_i são T_0 para todo $i \in I$.

Demonstração. (a) Sejam $x, y \in S$ dois pontos distintos. Como $x, y \in X$ e X é T_0 , existe uma vizinhança de x ou uma vizinhança de y em X que exclui o outro ponto. Suponha, sem perda de generalidade, que exista $U \in \mathcal{U}_{x,X}$ tal que $y \notin U$. Então $U \cap S \in \mathcal{U}_{x,S}$ (pela definição da topologia induzida) e $y \notin U \cap S$. Portanto S é T_0 .

- (b) Para mostrar a parte *somente se*, suponha que $\prod_{i \in I} X_i$ seja um espaço T_0 . Queremos mostrar que X_i é T_0 para todo $i \in I$. Para isso, fixe $i \in I$ e suponha que x_i e y_i são dois pontos distintos em X_i . Queremos construir $U_i \in \mathcal{U}_{x_i, X_i}$ tal que $y_i \notin U_i$. Para isso, escolha $\chi \in \pi_i^{-1}(x_i)$ e defina $\gamma \in \prod_{i \in I} X_i$ da seguinte

forma: $\gamma(i) = y_i$ e $\gamma(j) = \chi(j)$ para todo $j \neq i$. Como $x_i \neq y_i$, então $\chi \neq \gamma$. Como $\prod_{i \in I} X_i$ é um espaço T_0 por hipótese, então existe uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_\chi$ tal que $\gamma \notin U$, ou existe uma vizinhança $V \in \mathcal{U}_\gamma$ tal que $\chi \notin V$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que seja o primeiro caso. Como $U \in \mathcal{U}_\chi$, então, para cada $i \in I$, existe um aberto $A_i \subseteq X_i$, tal que $\chi \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq U$. Como $\gamma \notin U$ e $\gamma(j) = \chi(j) \in A_j$ para todo $j \neq i$, então $\gamma(i) \notin A_i$. Ou seja, $A_i \in \mathcal{U}_{x_i, X_i}$ e $y_i \notin A_i$. Isso mostra que X_i é T_0 .

Para mostrar a parte *se*, suponha que X_i é um espaço topológico T_0 para todo $i \in I$. Depois, fixe dois pontos distintos, x e y , em $\prod_{i \in I} X_i$. Como $x \neq y$, existe $i \in I$ tal que $x_i \neq y_i$. Como X_i é T_0 por hipótese, existe uma vizinhança U_i de x_i em X_i tal que $y_i \notin U_i$, ou existe uma vizinhança V_i de y_i em X_i tal que $x_i \notin V_i$. Sem perda de generalidade, suponha que seja o primeiro caso. Nesse caso, observe que $\pi_i^{-1}(U_i)$ é uma vizinhança de x em $\prod_{i \in I} X_i$ que não contém y . De fato, como π_i é uma função contínua (ver Proposição 9.5(a)) e U_i é uma vizinhança de x_i , os Lemas 6.5 e 4.7(b) implicam que $\pi_i^{-1}(U_i)$ é uma vizinhança de x . Além disso, como $\pi_i(y) = y_i \notin U_i$, então $y \notin \pi_i^{-1}(U_i)$. Isso mostra que $\prod_{i \in I} X_i$ é um espaço T_0 . $\square$

A proposição acima garante estabilidade de T_0 sob subespaços e produtos. Quanto a imagens por funções, a situação é mais delicada: como o exemplo a seguir mostra, uma imagem contínua e sobrejetora de um espaço T_0 não precisa ser T_0 , mesmo que a função seja a identidade.

Exemplo 15.5. Vamos mostrar que uma imagem por uma função contínua de um espaço topológico T_0 não necessariamente é T_0 . Para isso, considere o conjunto $X = \{a, b\}$ e as topologias $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ (discreta) e $\tau' = \{\emptyset, X\}$ (trivial). Como a topologia τ é mais fina que τ' , então $\text{id}_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ é uma função contínua e sobrejetora. Pelo Exemplo 15.2, (X, τ) é T_0 , mas (X, τ') não é T_0 .

Por outro lado, impor condições adicionais sobre uma função pode garantir que a propriedade T_0 seja preservada. Vamos concluir essa primeira parte da aula enunciando um exercício que pede para mostrar que a condição de ser fechada, combinada com a sobrejetividade, garante que a função preserve esse axioma de separabilidade.

Exercício 15.1. Encontre exemplos de dois espaços topológicos X e Y e uma função $f : X \rightarrow Y$ tais que: X é T_0 , f é fechada e sobrejetora, e Y não é T_0 .

Resolução (Zyon). Comece considerando o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, munido da topologia τ definida por

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{(n, +\infty) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

A verificação de que τ é de fato uma topologia em $\mathbb{Z}$ é muito parecida com a demonstração do Exercício 3.1. Note que esse espaço topológico é T_0 . De fato, dados $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{Z}$, temos que $n_1 < n_2$, ou que $n_2 < n_1$. No primeiro caso, o aberto $(n_2 - 1, +\infty)$ contém n_2 e não contém n_1 ; e no segundo caso, o aberto $(n_1 - 1, +\infty)$ contém n_1 e não contém n_2 .

Depois, considere o conjunto $\{0, 1\}$ munido da sua topologia trivial. Pelo Exemplo 15.2, esse espaço topológico não é T_0 .

Por fim, considere a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ dada por:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

É evidente que essa função é sobrejetora. Para concluir o exercício, vamos verificar que f também é fechada. Para isso, comece observando que os fechados não vazios de X têm a forma $(-\infty, n)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Assim, cada fechado não vazio contém ao menos um número par e um número ímpar. Isso implica que a imagem de qualquer fechado não vazio por f será exatamente $\{0, 1\}$, que é fechado (na topologia trivial).

Isso mostra que f é uma função sobrejetora e fechada. Além disso, temos que $\mathbb{Z}$ é um espaço T_0 , quando munido da topologia τ , e que $\{0, 1\}$ é um espaço que não é T_0 , quando munido da sua topologia trivial. $\square$

AULA 16

16.1. Espaços T_1 . Nessa aula, vamos apresentar os espaços topológicos T_1 . O axioma T_1 fortalece a condição do axioma T_0 exigindo que a separação seja *simétrica*: dados dois pontos distintos x e y , deve existir uma vizinhança de x que exclui y e, simultaneamente, uma vizinhança de y que exclui x . Veremos que essa condição é equivalente a pedir que todo conjunto com um elemento seja fechado, o que fornece uma caracterização elegante e muito útil em demonstrações.

Definição 16.1 (de espaço T_1). Um espaço topológico não vazio X é dito T_1 quando: para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existem $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$ tais que $U \not\subset \mathcal{U}_y$ e $V \not\subset \mathcal{U}_x$.

Observação 16.2. Todo espaço topológico T_1 é T_0 . De fato, se X é um espaço topológico T_1 , para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existem $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$ tais que $U \not\subset \mathcal{U}_y$ e $V \not\subset \mathcal{U}_x$. Em particular, $\mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y$. Pela Proposição 15.3, isso significa que X também é T_0 .

Como observado acima, todo espaço T_1 é T_0 também. Mas a volta não é verdadeira. O exemplo a seguir determina completamente quais das topologias num conjunto de dois elementos são T_1 e, em particular, mostra que a topologia de Sierpinski é T_0 , mas não é T_1 .

Exemplo 16.3. Considere o conjunto $X = \{a, b\}$. Lembre que, a menos de homeomorfismos, as únicas topologias em X são: a trivial, a de Sierpinski e a discreta. Vamos determinar quais delas são T_1 :

- Topologia trivial. Como o conjunto X munido da topologia trivial não é T_0 , pela contrapositiva da Observação 16.2, ele também não pode ser T_1 .
- Topologia de Sierpinski. Considere a topologia de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Observe que $\mathcal{U}_a = \{\{a\}, X\}$ e $\mathcal{U}_b = \{X\}$. Como a única vizinhança de b é X , que contém a , não existe vizinhança de b que exclua a . Portanto o conjunto X munido da topologia de Sierpinski não é um espaço T_1 . Observe que esse é um exemplo de espaço T_0 que não é T_1 .
- Topologia discreta. Observe que, neste caso, $\{a\}$ é uma vizinhança de a que não contém b e $\{b\}$ é uma vizinhança de b que não contém a . Portanto o conjunto X munido da topologia discreta é um espaço T_1 .

O exemplo a seguir mostra que os espaços métricos são T_1 .

Exemplo 16.4. Suponha que (X, d) seja um espaço métrico. Dados dois pontos distintos $x, y \in X$, temos que $d(x, y) > 0$ (caso contrário, $d(x, y) = 0$ implicaria que $x = y$). Tomando $r = d(x, y)/2 > 0$, as bolas abertas $B(x, r)$ e $B(y, r)$ satisfazem: $B(x, r) \in \mathcal{U}_x$ e $y \notin B(x, r)$; e $B(y, r) \in \mathcal{U}_y$ e $x \notin B(y, r)$. Portanto (X, d) é um espaço topológico T_1 .

Os exemplos acima sugerem que os conjuntos com um elemento são a chave para entender o axioma de separabilidade T_1 . A proposição a seguir torna essa intuição precisa, fornecendo uma caracterização que será usada sistematicamente nas demonstrações subsequentes.

Proposição 16.5. Um espaço topológico não vazio X é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, o conjunto $\{x\}$ é fechado.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que X é T_1 , e fixe um elemento $x \in X$. Queremos mostrar que $\{x\}$ é um subconjunto fechado ou, equivalentemente, que $X \setminus \{x\}$ é um subconjunto aberto de X . Pelo Lema 5.5(a), isso equivale a mostrar que, para todo $y \neq x$, existe um aberto A em X tal que $y \in A$ e $x \notin A$. De fato, como X é um espaço T_1 por hipótese, então, para todo $y \neq x$, existe $V \in \mathcal{U}_y$ tal que $V \notin \mathcal{U}_x$, ou seja, tal que $y \in V^\circ$ e $x \notin V^\circ$. Isso mostra que $X \setminus \{x\}$ é aberto e, consequentemente, que $\{x\}$ é fechado em X .

Para mostrar a parte *se*, suponha que $\{x\}$ seja um conjunto fechado para todo $x \in X$. Para mostrar que X é um espaço T_1 fixe dois elementos distintos x e y em X . Como $\{x\}$ é um subconjunto fechado e $y \neq x$, então $X \setminus \{x\}$ é um subconjunto aberto, que contém y e não contém x . Assim, temos que $X \setminus \{x\} \in \mathcal{U}_y$ e $X \setminus \{x\} \notin \mathcal{U}_x$. Analogamente, como $\{y\}$ é um subconjunto fechado e $x \neq y$, então $X \setminus \{y\} \in \mathcal{U}_x$ e $X \setminus \{y\} \notin \mathcal{U}_y$. Isso mostra que X é um espaço T_1 . $\square$

Com a caracterização via conjuntos de um elemento, as demonstrações de estabilidade de T_1 tornam-se bastante diretas. A proposição a seguir reúne resultados análogos aos da Proposição 15.4, acrescidos da importante propriedade de preservação por funções fechadas.

Proposição 16.6. (a) Sejam X um espaço topológico não vazio e S um subespaço topológico não vazio de X . Se X é T_1 , então S também é T_1 .
 (b) Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço topológico $\prod_{i \in I} X_i$ é T_1 se, e somente se, X_i é T_1 para todo $i \in I$.
 (c) Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Se X for T_1 e f for fechada e sobrejetora, então Y também é T_1 .

Demonstração. As demonstrações dos itens (a) e (b) são muito parecidas às demonstrações dos itens da Proposição 15.4. Assim, vamos demonstrar apenas o item (c). Pela Proposição 16.5, basta mostrar que $\{y\}$ é fechado para todo $y \in Y$. Como f é sobrejetora, para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X é T_1 , então $\{x\}$ é fechado pela Proposição 16.5. Como f é fechada, então $f(\{x\}) = \{y\}$ é fechado em Y . Isso mostra que Y é um espaço T_1 . $\square$

Assim como para o axioma de separabilidade T_0 , a condição de T_1 não é preservada por imagens de funções abertas nem contínuas em geral, mesmo que a função seja sobrejetora. Os dois exemplos a seguir ilustram cada uma dessas situações.

Exemplo 16.7. Vamos mostrar que uma imagem por uma função aberta e sobrejetora de um espaço T_1 não necessariamente é T_1 . Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida

da sua topologia usual, considere o conjunto $K = \{1/n \mid n > 0\} \cup \{0\}$ munido da topologia induzida de $\mathbb{R}$, considere o conjunto $Y = \{a, b\}$ munido da topologia de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{b\}, Y\}$, e considere a função

$$f : K \rightarrow Y \quad \text{dada por} \quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x = 0, \\ b, & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Observe que f é aberta e sobrejetora. Lembre do Exemplo 16.4 que $\mathbb{R}$ é um espaço T_1 (métrico). Daí e da Proposição 16.6(a), segue que K é um espaço T_1 . No entanto, no Exemplo 16.3, nós mostramos que Y não é um espaço T_1 .

Exemplo 16.8. Vamos mostrar que uma imagem por uma função contínua e sobrejetora de um espaço T_1 não necessariamente é T_1 . Considere o conjunto com dois elementos, $X = \{a, b\}$, munido da sua topologia discreta, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$, e da sua topologia trivial, $\tau' = \{\emptyset, X\}$. Como τ é mais fina que τ' , a função identidade $\text{id}_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ é contínua e sobrejetora. Pelo Exemplo 16.3, (X, τ) é T_1 , mas (X, τ') não é T_1 .

Os exercícios desta subseção têm três objetivos complementares. O primeiro exercício é de natureza computacional: pede para classificar topologias concretas em $\mathbb{R}$ quanto às propriedades T_0 e T_1 , permitindo consolidar os exemplos vistos ao longo da aula. O segundo e o terceiro exploram como essas propriedades interagem com refinamentos de topologias e com homeomorfismos, estabelecendo resultados que serão úteis nas aulas seguintes.

Exercício 16.1. Sejam X um conjunto não vazio e τ, τ' duas topologias em X .

- (a) Mostre que, se (X, τ) é T_0 e τ' é mais fina que τ , então (X, τ') é T_0 .
- (b) Mostre que, se (X, τ) é T_1 e τ' é mais fina que τ , então (X, τ') é T_1 .

Resolução (Celso). Antes de mostrarmos os dois itens desse exercício, observe que, se X for um conjunto não vazio, x for um ponto em X e $\tau \subseteq \tau'$ forem duas topologias em X , então toda vizinhança do ponto x em relação à topologia τ também será uma vizinhança de x em relação à topologia τ' . De fato, se U for uma vizinhança de x em relação à τ , isso significa que existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subseteq U$ (ver Definição 4.1). Como $\tau \subseteq \tau'$, então $A \in \tau'$ também e, consequentemente, U é uma vizinhança de x em relação à τ' também.

- (a) Suponha que o espaço topológico (X, τ) é T_0 . Isso significa que, para quaisquer dois pontos distintos $x \neq y$ em X : ou existe uma vizinhança U de x em relação à τ tal que $y \notin U$, ou existe uma vizinhança V de y em relação à τ tal que $x \notin V$. Como a τ' é mais fina que τ , no primeiro caso, teremos que U é vizinhança de x em relação à τ' tal que $y \notin U$, e no segundo caso, teremos que V é uma vizinhança de y em relação à τ' tal que $x \notin V$. Isso mostra que (X, τ') é um espaço topológico T_0 também.
- (b) Suponha que o espaço topológico (X, τ) é T_1 . Isso significa que, para quaisquer dois pontos distintos $x \neq y$ em X , existem uma vizinhança U de x em relação

à τ que não é uma vizinhança de y em relação à τ e uma vizinhança V de y em relação à τ que não é uma vizinhança de x em relação à τ . Ou seja,

$$x \in U^\circ, y \notin U^\circ, y \in V^\circ \text{ e } x \notin V^\circ,$$

onde $^\circ$ denota o interior dos respectivos subconjuntos em relação à topologia τ . Como $U^\circ, V^\circ \in \tau$ (ver Lema 5.5(a)) e $\tau \subseteq \tau'$ por hipótese, então $U^\circ, V^\circ \in \tau'$. Logo, U° é uma vizinhança (aberta) de x que não é uma vizinhança de y em relação à topologia τ' e V° é uma vizinhança (aberta) de y que não é uma vizinhança de x em relação à topologia τ' . Isso mostra que (X, τ') também é um espaço topológico T_1 . $\square$

Exercício 16.2. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ munido das seguintes topologias: discreta, topologia K (Exercício 3.2), de Sorgenfrey (Exemplo 3.5), usual (métrica), coenumerável (Exemplo 13.6), cofinita (Exemplo 2.3), topologia do Exercício 3.1, e trivial. Determine quais dessas topologias são T_0 e quais são T_1 .

Resolução (Angie). Vamos analisar essas topologias na reta real separadamente, da mais grossa para a mais fina.

- Topologia trivial. Dados dois números reais distintos, $x \neq y \in \mathbb{R}$, as suas únicas vizinhanças em relação à topologia trivial são ambas iguais a X . Logo, a reta real munida da sua topologia trivial não é um espaço topológico T_0 , nem T_1 .
- Topologia do Exercício 3.1. Lembre que a topologia definida no Exercício 3.1 é a topologia na reta real gerada pela família $\mathcal{B} := \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Vamos mostrar que a reta real munida com essa topologia é T_0 e não é T_1 .

Sejam x e y dois números reais distintos. Como $x \neq y$, então temos duas possibilidades: ou $x < y$, ou $y < x$. No primeiro caso, temos que $(\frac{x+y}{2}, \infty)$ é uma vizinhança de y que não contém x . No segundo caso, temos que $(\frac{x+y}{2}, \infty)$ é uma vizinhança de x que não contém y . Isso mostra que a reta real munida da topologia definida no Exercício 3.1 é T_0 .

Para mostrar que a reta real munida da topologia definida no Exercício 3.1 não é T_1 , vamos verificar que toda vizinhança aberta de 2 também contém a 4. De fato, se U for uma vizinhança de 2, então existe um subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ tal que $2 \in A \subseteq U$ e, consequentemente, um subconjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $2 \in B \subseteq A$. Como todo subconjunto B em $\mathcal{B}$ é da forma $B = (a, \infty)$ para algum $a \in \mathbb{R}$, e como $2 \in (a, \infty)$ somente se $a < 2$, segue daí que toda vizinhança de 2 contém um intervalo (a, ∞) para algum $a < 2$. Como $2 < 4$, segue que $4 \in (a, \infty) \subseteq U$ para toda vizinhança de 2. Isso mostra que a reta real munida da topologia definida no Exercício 3.1 não é T_1 .

- Topologia cofinita. Sejam x e y dois números reais distintos. Observe que $U_x := \mathbb{R} \setminus \{y\}$ é uma vizinhança de x que não contém y e $U_y := \mathbb{R} \setminus \{x\}$ é uma vizinhança de y que não contém x . Logo a reta real $\mathbb{R}$ munida com a topologia cofinita é T_1 e, consequentemente, também é T_0 (ver Observação 16.2).
- Topologia coenumerável. Como a topologia coenumerável é mais fina que a topologia cofinita e a reta real munida da sua topologia cofinita é um espaço

topológico T_0 e T_1 , segue do Exercício 16.1 que a reta real munida da topologia coenumerável também é T_0 e T_1 .

- Topologia usual. Como a reta real munida da sua topologia usual é um espaço métrico, pelo Exemplo 16.4 e pela Observação 16.2, ela é T_0 e T_1 .
- Topologia K. Como a topologia K é mais fina que a topologia usual e a reta real munida da sua topologia usual é um espaço topológico T_0 e T_1 , segue do Exercício 16.1 que a reta real munida da topologia K também é T_0 e T_1 .
- Topologia de Sorgenfrey. Como a topologia de Sorgenfrey é mais fina que a topologia usual e a reta real munida da sua topologia usual é um espaço topológico T_0 e T_1 , segue do Exercício 16.1 que a reta real munida da topologia K também é T_0 e T_1 .
- Topologia discreta. Como a topologia discreta é mais fina que a topologia usual e a reta real munida da sua topologia usual é um espaço topológico T_0 e T_1 , segue do Exercício 16.1 que a reta real munida da topologia K também é T_0 e T_1 . $\square$

Exercício 16.3. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Mostre que:

- (a) X é T_0 se, e somente se, Y é T_0 .
- (b) X é T_1 se, e somente se, Y é T_1 .

Resolução (Daniel). (a) $(\Rightarrow)$: Suponha que X seja T_0 . Dado que $y_1 \neq y_2$ em Y , como f é bijetora, existem únicos $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Além disso, observe que, como $y_1 \neq y_2$, então $x_1 \neq x_2$. Agora, como X é T_0 : ou existe uma vizinhança $U_1 \in \mathcal{U}_{x_1}$ tal que $x_2 \notin U_1$, ou existe uma vizinhança $U_2 \in \mathcal{U}_{x_2}$ tal que $x_1 \notin U_2$. Como f é aberta, no primeiro caso, temos que $f(U_1^\circ)$ é um subconjunto aberto de Y tal que $y_1 = f(x_1) \in f(U_1^\circ)$. Além disso, como $y_2 = f(x_2)$, f é uma função bijetora, $x_2 \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, então $y_2 \notin f(U_1^\circ)$. Isso significa que, nesse caso, $f(U_1^\circ)$ é uma vizinhança de y_1 que não contém y_2 . Analogamente, no segundo caso, temos que $f(U_2^\circ)$ é um subconjunto aberto de Y tal que $y_2 = f(x_2) \in f(U_2^\circ)$. Além disso, como $y_1 = f(x_1)$, f é uma função bijetora, $x_1 \in U_1$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, então $y_1 \notin f(U_2^\circ)$. Isso significa que, nesse caso, $f(U_2^\circ)$ é uma vizinhança de y_2 que não contém y_1 . Isso mostra que Y é T_0 .

$(\Leftarrow)$: Suponha que Y seja T_0 . Sejam x_1 e x_2 dois pontos distintos de X . Defina $y_1 := f(x_1)$ e $y_2 := f(x_2) \in Y$. Como $x_1 \neq x_2$ e f é bijetora, então $y_1 \neq y_2$. Como Y é T_0 : ou existe uma vizinhança $V_1 \in \mathcal{U}_{y_1}$ tal que $y_2 \notin V_1$, ou existe uma vizinhança $V_2 \in \mathcal{U}_{y_2}$ tal que $y_1 \notin V_2$. Como f é contínua, no primeiro caso, existe $U_1 \in \mathcal{U}_{x_1}$ tal que $f(U_1) \subseteq V_1$ (ver Lema 6.5). Como $y_2 = f(x_2)$, f é bijetora, $y_2 \in V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, então $x_2 \notin U_1$. Analogamente, no segundo caso, existe $U_2 \in \mathcal{U}_{x_2}$ tal que $f(U_2) \subseteq V_2$ (ver Lema 6.5). Como $y_1 = f(x_1)$, f é bijetora, $y_1 \in V_1$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, então $x_1 \notin U_2$. Isso mostra que X é T_0 .

- (b) $(\Rightarrow)$: Suponha que X seja T_1 . Vamos mostrar que os conjuntos $\{y\}$ são fechados em Y para todos os pontos $y \in Y$. Pela Proposição 16.5, isso implicará que Y é

T_1 também. Assim, comece fixando $y \in Y$. Como f é bijetora, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X é T_1 , segue da Proposição 16.5 que o conjunto $\{x\}$ é um subconjunto fechado em X . Como f é fechada, então $f(\{x\}) = \{y\}$ é um subconjunto fechado em Y . Pela Proposição 16.5, isso implica que Y é T_1 .

($\Leftarrow$): Suponha que Y seja T_1 . Pela Proposição 16.5, isso implica que, para todo $x \in X$, o conjunto $\{f(x)\}$ é fechado em Y . Como f é contínua e bijetora, isso implica que o conjunto $\{x\} = f^{-1}(\{f(x)\})$ é fechado em X . Pela Proposição 16.5, isso implica que X é T_1 também. $\square$

AULA 17

Nesta aula, estudaremos o axioma de separação T_2 , mais conhecido como condição de Hausdorff. Esse axioma fortalece a condição T_1 ao pedir que dois pontos distintos quaisquer possam ser separados por vizinhanças *disjuntas*. A condição de Hausdorff também é satisfeita por todos os espaços métricos. Sua importância fundamental reside no fato de que, em espaços Hausdorff, redes e filtros convergentes convergem exatamente para um ponto. Veremos que essa unicidade de limite é, de fato, equivalente à condição de Hausdorff, e estudaremos como essa propriedade se comporta sob subespaços, produtos e imagens por funções.

17.1. Espaços T_2 ou Hausdorff. Vamos começar com a definição do axioma de separação T_2 e de espaço Hausdorff.

Definição 17.1 (de espaço Hausdorff ou T_2). Um espaço topológico não vazio X é dito **Hausdorff** ou T_2 quando: para quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$, existem $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$ tais que $U \cap V = \emptyset$.

Observação 17.2. Todo espaço topológico Hausdorff é T_1 . De fato, suponha que X seja um espaço topológico Hausdorff e $x, y \in X$ sejam dois pontos distintos. Por hipótese, existem $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Como $x \in U$ e $y \in V$, temos, em particular, que $y \notin U$ e $x \notin V$. Isso implica que $U \notin \mathcal{U}_y$ e $V \notin \mathcal{U}_x$, ou seja, que X é T_1 .

A hierarquia $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ que se vai formando é estrita: veremos nos exemplos abaixo que existem espaços T_1 que não são Hausdorff. Os exemplos mais importantes de espaços Hausdorff são os espaços métricos, que já conhecemos.

Exemplo 17.3. Todo espaço métrico é Hausdorff. De fato, suponha que (X, d) seja um espaço métrico. Dados dois pontos distintos $x, y \in X$, temos que $d(x, y) > 0$. Tomando $r = d(x, y)/2 > 0$, as bolas abertas $B(x, r) \in \mathcal{U}_x$ e $B(y, r) \in \mathcal{U}_y$ satisfazem $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. De fato, se existisse $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$, então a desigualdade triangular implicaria que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = d(x, y)$. Como $d(x, y) \not< d(x, y)$, isso implica que não existe tal elemento $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$, ou seja, que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.

O exemplo a seguir mostra que a condição T_2 é estritamente mais forte que T_1 , ou seja, ele exibe um exemplo concreto de um espaço T_1 que não é Hausdorff.

Exemplo 17.4. Considere o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munido com a sua topologia cofinita (ver Exemplo 2.3). Dados $n \neq m \in \mathbb{Z}$, observe que $\mathbb{Z} \setminus \{m\}$ é uma vizinhança de n que não é uma vizinhança de m e que $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ é uma vizinhança de m que não é uma vizinhança de n . Isso mostra que esse espaço topológico é T_1 .

Agora vamos mostrar que esse espaço topológico não é Hausdorff. Para isso, suponha que n e m são dois números inteiros distintos, que U é uma vizinhança de n e que V é uma vizinhança de m . Vamos verificar que $U \cap V \neq \emptyset$. Para isso, comece observando que $U^\circ, V^\circ \neq \emptyset$, porque elas contêm os pontos n e m respectivamente.

Assim, pela definição da topologia cofinita, $\mathbb{Z} \setminus U^\circ$ e $\mathbb{Z} \setminus V^\circ$ são conjuntos finitos. Logo,

$$\mathbb{Z} \setminus (U \cap V) \subseteq \mathbb{Z} \setminus (U^\circ \cap V^\circ) = (\mathbb{Z} \setminus U^\circ) \cup (\mathbb{Z} \setminus V^\circ)$$

também é um conjunto finito. Como $\mathbb{Z}$ não é um conjunto finito, então $U \cap V$ não pode ser vazio. Isso mostra que não existem vizinhanças disjuntas de n e m , e, conseqüentemente, que $\mathbb{Z}$ não é um espaço Hausdorff quando munido da topologia cofinita.

Os exemplos acima confirmam a hierarquia $T_2 \Rightarrow T_1$, e mostram que ela é estrita. Os exercícios a seguir complementam esses exemplos. O primeiro mostra que a propriedade de Hausdorff é preservada por topologias mais finas e o segundo determina quais das topologias da reta real $\mathbb{R}$ são Hausdorff.

Exercício 17.1. Mostre que toda topologia mais fina que uma topologia Hausdorff também é Hausdorff.

Resolução (Israel). Seja (X, τ) um espaço topológico Hausdorff e seja τ' uma topologia em X mais fina que τ , ou seja, $\tau \subseteq \tau'$. Dados dois pontos distintos, $x, y \in X$, como (X, τ) é Hausdorff, existem vizinhanças $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$ em relação à τ tais que: $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Conseqüentemente, $x \in U^\circ$, $y \in V^\circ$ e $U^\circ \cap V^\circ = \emptyset$. Como $\tau \subseteq \tau'$, temos $U^\circ, V^\circ \in \tau'$ também. Portanto, U e V também são vizinhanças de x e y em relação à τ' tais que: $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Logo, (X, τ') também é Hausdorff. $\square$

Exercício 17.2. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ munido das seguintes topologias: discreta, topologia K (Exercício 3.2), de Sorgenfrey (Exemplo 3.5), usual (métrica), cofinita (Exemplo 2.3), topologia do Exercício 3.1, topologia coenumerável (Exemplo 13.6) e trivial. Determine quais dessas topologias (não) são Hausdorff.

Resolução (Mateus). Vamos analisar essas topologias da reta real, começando pela mais grossa.

- (a) Topologia trivial. Como reta real não é um espaço topológico T_1 quando munida da topologia trivial (ver Exercício 16.2), segue da Observação 17.2 que a reta real também não é um espaço Hausdorff quando munido com a topologia trivial.
- (b) Topologia do Exercício 3.1. Como reta real não é um espaço topológico T_1 quando munida da topologia do Exercício 3.1 (ver Exercício 16.2), segue da Observação 17.2 que a reta real também não é um espaço Hausdorff quando munido com a topologia do Exercício 3.1.
- (c) Topologia cofinita. Suponha que x e y sejam dois pontos distintos de $\mathbb{R}$ e que $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$ sejam vizinhanças desses pontos. Vamos mostrar que $U \cap V \neq \emptyset$. Isso implicará que a reta real *não* é um espaço topológico Hausdorff quando munida com a topologia cofinita. De fato, como $x \in U^\circ$ e $y \in V^\circ$, então U° e V° são dois abertos não vazios de $\mathbb{R}$. Pela definição da topologia cofinita, isso significa que seus complementares, $\mathbb{R} \setminus U^\circ$ e $\mathbb{R} \setminus V^\circ$, são conjuntos finitos.

Assim,

$$\mathbb{R} \setminus (U \cap V) \subseteq \mathbb{R} \setminus (U^\circ \cap V^\circ) = (\mathbb{R} \setminus U^\circ) \cup (\mathbb{R} \setminus V^\circ)$$

também é um conjunto finito. Como $\mathbb{R}$ não é um conjunto finito, isso implica que $U \cap V$ não pode ser vazio. Isso mostra que, em relação à topologia cofinita, não existem vizinhanças disjuntas de x e y . Com isso, concluímos que $\mathbb{R}$ *não* é um espaço topológico Hausdorff quando munido com a topologia cofinita.

- (d) Topologia coenumerável. Suponha que x e y sejam dois pontos distintos de $\mathbb{R}$ e que $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$ sejam vizinhanças desses pontos. Vamos mostrar que $U \cap V \neq \emptyset$. Isso implicará que a reta real *não* é um espaço topológico Hausdorff quando munida com a topologia coenumerável. De fato, como $x \in U^\circ$ e $y \in V^\circ$, então U° e V° são dois abertos não vazios de $\mathbb{R}$. Pela definição da topologia coenumerável, isso significa que seus complementares, $\mathbb{R} \setminus U^\circ$ e $\mathbb{R} \setminus V^\circ$, são conjuntos enumeráveis. Assim,

$$\mathbb{R} \setminus (U \cap V) \subseteq \mathbb{R} \setminus (U^\circ \cap V^\circ) = (\mathbb{R} \setminus U^\circ) \cup (\mathbb{R} \setminus V^\circ)$$

também é um conjunto enumerável. Como $\mathbb{R}$ não é um conjunto enumerável, isso implica que $U \cap V$ não pode ser vazio. Isso mostra que, em relação à topologia coenumerável, não existem vizinhanças disjuntas de x e y . Com isso, concluímos que $\mathbb{R}$ *não* é um espaço topológico Hausdorff quando munido com a topologia coenumerável.

- (e) Topologia usual. Como a topologia usual da reta real é induzida por uma métrica e todo espaço métrico é Hausdorff (ver Exemplo 17.3), concluímos que a reta real é um espaço topológico Hausdorff quando munida da sua topologia usual.
- (f) Topologia K. Como a topologia K é mais fina que a topologia usual da reta real, segue do Exercício 17.1 e do item anterior que a reta real é um espaço Hausdorff quando munido da topologia K.
- (g) Topologia de Sorgenfrey. Como a topologia de Sorgenfrey é mais fina que a topologia usual da reta real, também segue do Exercício 17.1 que a reta real é um espaço Hausdorff quando munido da topologia de Sorgenfrey.
- (h) Topologia discreta. Como a topologia discreta é mais fina que a topologia usual da reta real, segue do Exercício 17.1 que a reta real também é um espaço Hausdorff quando munido da topologia discreta. $\square$

Agora que nós temos exemplos de espaços que são Hausdorff e que não são Hausdorff, vamos estabelecer uma caracterização da condição de Hausdorff em termos de redes. Na proposição a seguir nós mostramos que um espaço é Hausdorff se, e somente se, toda rede convergente tem um único limite.

Proposição 17.5. Um espaço topológico não vazio X é Hausdorff se, e somente se, toda rede convergente converge para apenas um ponto.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que X seja um espaço topológico Hausdorff e fixe um conjunto dirigido $(N, \leq)$ e uma rede $x : N \rightarrow X$ que

converge para dois pontos p, q em X . Vamos mostrar que $p = q$. Para isso, comece lembrando que X ser Hausdorff significa que: se $p \neq q$, então existem $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Equivalentemente, pela contrapositiva, X ser Hausdorff significa que: se $U \cap V \neq \emptyset$ para todas $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$, então $p = q$. Como os queremos mostrar que $p = q$ e nós temos que X é Hausdorff por hipótese, então basta mostrar que $U \cap V \neq \emptyset$ para todas as vizinhanças $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$.

Para isso, comece lembrando da hipótese de que $x : N \rightarrow X$ é uma rede em X que converge para p e para q . Como x converge para p , para toda $U \in \mathcal{U}_p$ existe $n_0 \in N$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \in N$ tal que $n_0 \leq n$; e como x converge para q , para toda $V \in \mathcal{U}_q$ existe $m_0 \in N$ tal que $x_m \in V$ para todo $m \in N$ tal que $m_0 \leq m$. Como $(N, \leq)$ é um conjunto dirigido, então existe $l \in N$ tal que $n_0, m_0 \leq l$. Assim, $x_l \in U \cap V$. Isso mostra que $U \cap V \neq \emptyset$ para todas as vizinhanças $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$. Como X é um espaço topológico Hausdorff, isso implica que $p = q$.

Para mostrar a parte *se*, suponha que toda rede convergente em X converge para apenas um ponto. Nós queremos mostrar que X é um espaço topológico Hausdorff, ou seja, que, se p, q são pontos de X tais que $U \cap V \neq \emptyset$ para todas $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$, então $p = q$. Para isso, vamos construir uma rede em X que converge para p e para q simultaneamente. Pela hipótese de que toda rede convergente em X converge para apenas um ponto, nós obteremos que $p = q$.

Para construir uma rede em X que converge para p e para q simultaneamente comece fixando pontos $p, q \in X$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$ para todas $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$. Depois, defina o conjunto

$$N := \{(w, U, V) \mid U \in \mathcal{U}_p, V \in \mathcal{U}_q, w \in U \cap V\}$$

e a relação $\leq$ em N dada por

$$(w, U, V) \leq (w', U', V') \iff U' \subseteq U \text{ e } V' \subseteq V.$$

Vamos verificar que $(N, \leq)$ é um conjunto dirigido:

- (i) Observe que, para todo $(w, U, V) \in N$, temos que $U \subseteq U$ e $V \subseteq V$. Isso significa que $(w, U, V) \leq (w, U, V)$.
- (ii) Observe que, se $(w, U, V) \leq (w', U', V')$ e $(w', U', V') \leq (w'', U'', V'')$, então $U'' \subseteq U' \subseteq U$ e $V'' \subseteq V' \subseteq V$. Isso significa que $(w, U, V) \leq (w'', U'', V'')$.
- (iii) Suponha que $(w, U, V), (w', U', V') \in N$. Como $U, U' \in \mathcal{U}_p$, então $U \cap U' \in \mathcal{U}_p$ (ver Lema 4.7(a)). Analogamente, como $V, V' \in \mathcal{U}_q$, então $V \cap V' \in \mathcal{U}_q$. Daí e da hipótese sobre p e q , obtemos que $(U \cap U') \cap (V \cap V') \neq \emptyset$. Ou seja, podemos escolher $w'' \in (U \cap U') \cap (V \cap V')$. Observe que, pela construção, temos que $(w'', U \cap U', V \cap V') \in N$, que $(w, U, V) \leq (w'', U \cap U', V \cap V')$ e que $(w', U', V') \leq (w'', U \cap U', V \cap V')$.

Isso mostra que $(N, \leq)$ é um conjunto dirigido.

Agora vamos definir uma rede $x : N \rightarrow X$ por $x(w, U, V) := w$ e mostrar que essa rede converge para p e para q . Para mostrar que essa rede converge para p , observe que, para toda $U \in \mathcal{U}_p$, temos que $n_0 := (p, U, X) \in N$. Além disso, observe que, se

$n \in N$ for tal que $n_0 \leq n$, então $x_n \in U$. De fato, se $n = (w, U', V) \in N$ e $n_0 \leq n$, então $w \in U' \cap V$, $U' \subseteq U$ e, consequentemente, $x_n = w \in U' \cap V \subseteq U' \subseteq U$. Isso mostra que a rede x converge para p . Analogamente, observe que, para toda $V \in \mathcal{U}_q$, temos que $m_0 := (q, X, V) \in N$. Além disso, observe que, se $m \in N$ for tal que $m_0 \leq m$, então $x_m \in V$. De fato, se $m = (w, U, V') \in N$ e $m_0 \leq m$, então $w \in U \cap V'$, $V' \subseteq V$ e, consequentemente, $x_m = w \in U \cap V' \subseteq V' \subseteq V$. Isso mostra que a rede x também converge para q . Pela hipótese de que toda rede convergente em X converge para apenas um ponto, nós obtemos que $p = q$ e, consequentemente, que X é Hausdorff. $\square$

Usando o resultado acima e a equivalência entre redes e filtros é possível mostrar que um espaço é Hausdorff se, e somente se, todo filtro convergente converge para apenas um ponto.

Exercício 17.3. Mostre que um espaço topológico não vazio X é Hausdorff se, e somente se, todo filtro convergente converge para apenas um ponto.

Resolução (Roger). Para mostrar a parte *somente se*, suponha que X seja um espaço topológico Hausdorff e fixe um filtro F que converge para dois pontos p, q em X . Vamos mostrar que $p = q$. Para isso, comece lembrando que X ser Hausdorff significa que: se $p \neq q$, então existem $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$ tais que $U \cap V = \emptyset$. Equivalentemente, pela contrapositiva, X ser Hausdorff significa que: se $U \cap V \neq \emptyset$ para todos $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$, então $p = q$. Como queremos mostrar que $p = q$ e nós temos que X é Hausdorff por hipótese, então basta mostrar que $U \cap V \neq \emptyset$ para todas as vizinhanças $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$.

Para isso comece lembrando da hipótese de que F é um filtro em X que converge para p e para q . Como F converge para p , então $\mathcal{U}_p \subseteq F$; e como F converge para q , então $\mathcal{U}_q \subseteq F$. Como F é um filtro, temos que $A \cap B \in F$ para todos $A, B \in F$. Em particular, se $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$, então $U \cap V \neq \emptyset$. Como X é um espaço topológico Hausdorff, isso implica que $p = q$.

Para mostrar a parte *se*, suponha que todo o filtro em X converge para apenas um ponto. Nós queremos mostrar que X é um espaço topológico Hausdorff, ou seja, que, se p, q são pontos de X tais que $U \cap V \neq \emptyset$ para todos $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$, então $p = q$. Para isso vamos construir um filtro em X que converge para p e para q simultaneamente. Pela hipótese de que todo o filtro em X converge para apenas um ponto, nós obteremos que $p = q$.

Para construir um filtro em X que converge para p e para q simultaneamente comece fixando pontos $p, q \in X$, tais $U \cap V \neq \emptyset$ para todas $U \in \mathcal{U}_p$ e $V \in \mathcal{U}_q$. Depois, defina o filtro F cuja base é $\mathcal{B} := \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}_p \text{ e } V \in \mathcal{U}_q\}$. Para verificar que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , comece observando que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, que $\mathcal{B} \neq \emptyset$ e que $\emptyset \notin \mathcal{B}$ (por hipótese). Depois, lembre do Lema 4.7(a) que, se $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_p$, então $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_p$ e, se $V_1, V_2 \in \mathcal{U}_q$, então $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}_q$. Isso implica que, se $B_1 = U_1 \cap V_1$, $B_2 = U_2 \cap V_2 \in \mathcal{B}$, então $B_3 := (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}$. Daí e do Lema 14.6 segue que $\mathcal{B}$ é, de fato, uma base de filtro em X .

Para mostrar que o filtro gerado por $\mathbf{B}$ converge para p e para q , basta mostrar que $\mathbf{B}$ converge para p e para q (ver Lema 14.10(b)). Para mostrar que $\mathbf{B}$ converge para p , basta observar que $U = U \cap X \in \mathbf{B}$ para toda $U \in \mathcal{U}_p$; e para mostrar que $\mathbf{B}$ converge para q , basta observar que $V = X \cap V \in \mathbf{B}$ para toda $V \in \mathcal{U}_q$. Pela hipótese de que todo filtro convergente em X converge para apenas um ponto, nós obtemos que $p = q$ e, conseqüentemente, que X é Hausdorff. $\square$

A proposição e o exercício acima mostram que Hausdorff equivale à unicidade de limite de redes e de filtros. Vamos concluir essa aula com alguns exercícios que expandem os exemplos e resultados apresentados acima. Os primeiros dois exercícios estabelecem que essa propriedade ser Hausdorff é estável sob subespaços e produtos.

Exercício 17.4. Sejam X um espaço topológico não vazio e S um subespaço topológico não vazio de X . Mostre que, se X é Hausdorff, então S também é Hausdorff.

Exercício 17.5. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Mostre que: o espaço produto $\prod_{i \in I} X_i$ é Hausdorff se, e somente se, os espaços X_i são Hausdorff para todos os $i \in I$.

Os exemplos e exercícios a seguir ilustram que funções abertas, fechadas e contínuas podem não preservar a propriedade de um espaço ser Hausdorff.

Exemplo 17.6. Vamos mostrar que uma imagem por uma função aberta e sobrejetora de um espaço Hausdorff não necessariamente é Hausdorff. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da topologia usual, o conjunto $K = \{1/n \mid n > 0\} \cup \{0\}$ munido da topologia induzida de $\mathbb{R}$, e o conjunto $Y = \{a, b\}$ munido da topologia de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{b\}, Y\}$. Considere a função

$$f : K \rightarrow Y \quad \text{dada por} \quad f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x = 0, \\ b, & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Essa função f é aberta e sobrejetora, K é um espaço topológico Hausdorff (pelo Exercício 17.4 e Exemplo 17.3), e Y é um espaço topológico que não é Hausdorff (pela Observação 17.2 e Exemplo 16.3).

Exemplo 17.7. Vamos mostrar que uma imagem por uma função contínua e sobrejetora de um espaço Hausdorff não necessariamente é Hausdorff. Considere o conjunto $X = \{a, b\}$ com a topologia discreta $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ e com a topologia trivial $\tau' = \{\emptyset, X\}$. Como τ é mais fina que τ' , a identidade $\text{id}_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau')$ é uma função contínua e sobrejetora. Além disso, observe que (X, τ) é um espaço topológico Hausdorff e que (X, τ') é um espaço topológico que não é Hausdorff.

Exercício 17.6 (Zyon). Dê um exemplo de espaços topológicos X, Y e de uma função sobrejetora fechada $f : X \rightarrow Y$ tais que X é Hausdorff, mas Y não é Hausdorff.

Os últimos dois exercícios exploram consequências importantes da condição de Hausdorff: unicidade de extensão de funções contínuas e caracterização através da diagonal.

Exercício 17.7. Sejam X, Y dois espaços topológicos. Um subconjunto $D \subseteq X$ é dito **denso em X** quando $\overline{D} = X$. Suponha que $f, g : X \rightarrow Y$ são funções contínuas e que existe um subconjunto denso $D \subseteq X$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$. Mostre que, se Y for Hausdorff, então $f = g$.

Exercício 17.8. Sejam X e Y dois espaços topológicos não vazios e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua.

- (a) Mostre que X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ é um subconjunto fechado de $X \times X$.
- (b) Mostre que, se Y for Hausdorff, então o conjunto $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ é fechado em X , para qualquer função contínua $g : X \rightarrow Y$.

AULA 18

Nesta aula, estudaremos um novo axioma de separação, que impõe condições mais fortes do que as estudadas nas aulas anteriores. Enquanto o axioma de Hausdorff (T_2) exige que dois pontos distintos possam ser separados por abertos disjuntos, esse novo axioma exige que um ponto e um fechado que não o contém possam ser separados por abertos disjuntos.

Vamos começar a aula definindo espaços regulares e T_3 , apresentando exemplos e as relações desses espaços com os espaços que satisfazem os axiomas apresentados anteriormente. Em seguida, estabeleceremos uma caracterização do axioma de regularidade em termos de bases de fechados, provaremos que a regularidade se herda por subespaços e produtos, e encerraremos a aula com mais exemplos que ilustram os limites dessas propriedades.

18.1. Espaços T_3 e regulares. Começemos com as definições de espaços regulares e T_3 .

Definição 18.1 (de espaço regular e T_3). Um espaço topológico não vazio X é dito **regular** quando: para todo subconjunto fechado $Z \subseteq X$ e todo ponto $x \in X \setminus Z$, existem $U \in \mathcal{U}_x$ e um aberto $A \subseteq X$ tais que $Z \subseteq A$ e $U \cap A = \emptyset$. Um espaço topológico não vazio X é dito **T_3** quando X é regular e T_1 .

Observação 18.2. Todo espaço topológico T_3 é Hausdorff. De fato, se X for T_3 , então em particular X é T_1 e, pela Proposição 16.5, os subconjuntos de X com um elemento são fechados. Sejam x e z dois pontos distintos de X . Como $\{z\}$ é fechado e $x \notin \{z\}$, a regularidade de X implica que existem $U \in \mathcal{U}_x$ e um subconjunto aberto A tais que $\{z\} \subseteq A$ e $U \cap A = \emptyset$. Portanto $A \in \mathcal{U}_z$, $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \cap A = \emptyset$. Isso mostra que X é Hausdorff.

A observação acima mostra que todo espaço topológico T_3 é Hausdorff. Os exemplos a seguir mostram que essa implicação é estrita, ou seja, que existem espaços topológicos Hausdorff que não são regulares e espaços topológicos regulares que não são T_3 . Vamos começar mostrando que a condição T_1 é realmente necessária na definição do axioma T_3 .

Exemplo 18.3. Seja $X = \{a, b\}$ um conjunto com dois elementos, munido da sua topologia trivial, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Vamos mostrar que X é regular mas não é T_3 .

Para verificar a regularidade, observe que os únicos fechados de (X, τ) são $\emptyset$ e X . Assim, se $Z = \emptyset$ e $x \in X$, podemos tomar $U = X \in \mathcal{U}_x$ e $A = \emptyset$, de modo que $Z \subseteq A$ e $U \cap A = \emptyset$. Se $Z = X$, então não existe $x \in X \setminus Z = \emptyset$, de modo que, nesse caso, a condição é satisfeita por vacuidade. Portanto, X é regular. No entanto, como vimos no Exemplo 16.3, (X, τ) não é T_1 . Isso mostra que (X, τ) é regular e não é T_3 .

O exemplo a seguir mostra que existem espaços topológicos que são Hausdorff e não são regulares.

Exemplo 18.4. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da topologia K (ver Exercício 3.2). Esse espaço é Hausdorff porque a topologia K é mais fina que a topologia usual de $\mathbb{R}$ (ver Exercício 17.2). Agora vamos mostrar que esse espaço não é regular.

Para isso, considere o subconjunto fechado $K = \{1/n \mid n > 0\}$ e o ponto $0 \notin K$. Queremos verificar que toda vizinhança do ponto 0 e todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ que contém K sempre se intersectam. Para isso, fixe uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_0$. Depois, observe que existe $\epsilon > 0$ tal que $0 \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus K \subseteq U$. Agora, considere um número natural n tal que $1/n < \epsilon$. (Por exemplo, escolha $n = \lfloor 1/\epsilon \rfloor - 1$.) Se A for um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ que contém K , em particular, A conterá o ponto $1/n$. Observe que isso implica que existe $r > 0$ tal que $1/n \in (1/n - r, 1/n + r) \subseteq A$. Logo, a interseção entre U e A é não vazia. Isso mostra que a reta real munida da topologia K é um espaço topológico que não é regular.

Observe que uma consequência do exemplo anterior é que o axioma de regularidade não é herdado por topologias mais finas. Ou seja, existem espaços topológicos (X, τ) que são regulares (resp. T_3) e topologias τ' em X que são mais finas que τ e que fazem com que (X, τ') não seja um espaço regular (resp. T_3).

Para concluir essa série inicial de exemplos, vamos mostrar que os espaços métricos são sempre T_3 .

Exemplo 18.5. Todo espaço métrico é T_3 . De fato, seja (X, d) um espaço métrico. Lembre do Exemplo 16.4 que X é um espaço topológico T_1 . Agora vamos verificar que X também é um espaço topológico regular.

Para isso, fixe um subconjunto fechado Z de X e um ponto x em $X \setminus Z$. Depois, defina $r := \inf\{d(x, z) \mid z \in Z\}$. Vamos mostrar que $r > 0$. De fato, como Z é fechado e $x \notin Z$, então $x \in X \setminus Z$, que é aberto. Isso implica que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq X \setminus Z$, ou equivalentemente, $Z \subseteq X \setminus B(x, \epsilon)$. Ou seja, a distância de x aos pontos de Z é, no mínimo, ϵ . Logo $r \geq \epsilon > 0$.

Agora, podemos considerar os conjuntos $U := B(x, \frac{r}{2}) \in \mathcal{U}_x$ e $A := \bigcup_{z \in Z} B(z, \frac{r}{2})$. Por construção, U é uma vizinhança de x e A é um subconjunto aberto de X que contém Z . Vamos mostrar que $A \cap U = \emptyset$. De fato, se existisse $y \in A \cap U$, então $y \in B(z, \frac{r}{2})$ para algum $z \in Z$. Consequentemente, pela desigualdade triangular e pela hipótese de que $x \in B(x, \frac{r}{2})$, teríamos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Isso contradiria o fato de que $r := \inf\{d(x, z) \mid z \in Z\}$. Ou seja, não pode existir $y \in A \cap U$ e, consequentemente, $A \cap U = \emptyset$. Isso mostra que X é regular e, portanto, T_3 .

O exercício a seguir determina quais topologias em $\mathbb{R}$ satisfazem os axiomas de regularidade e T_3 .

Exercício 18.1. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida das seguintes topologias: discreta, topologia K (Exercício 3.2), de Sorgenfrey (Exemplo 3.5), usual (métrica), cofinita

(Exemplo 2.3), coenumerável (Exemplo 13.6), a do Exercício 3.1, e a trivial. Determine quais dessas topologias tornam a reta real um espaço regular e quais a tornam um espaço T_3 .

Resolução (Angie). • Topologia discreta. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $Z \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto fechado tal que $x \notin Z$. Em relação à topologia discreta, $\{x\}$ e Z são abertos em $\mathbb{R}$. Além disso, como $x \notin Z$, então $\{x\} \cap Z = \emptyset$. Logo, a reta real munida da sua topologia discreta é regular. Como todo ponto é fechado (e aberto) em relação à topologia discreta, então a reta real munida da sua topologia discreta também é T_3 .

- Topologia K. A reta real munida da topologia K não é um espaço regular e, consequentemente, não é um espaço T_3 (ver Exemplo 18.4).
- Topologia de Sorgenfrey. Sejam $Z \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto fechado e $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin Z$. Como Z é fechado, então $\mathbb{R} \setminus Z$ é aberto; e como $x \notin Z$, então $x \in \mathbb{R} \setminus Z$. Portanto, existe um aberto básico $[a, b)$ tal que $x \in [a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$. Defina $U := [a, b)$ e $A = \mathbb{R} \setminus [a, b)$. Como U é aberto e $x \in U$, então U é uma vizinhança de x . Além disso, como $[a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus Z$, então $Z \subseteq \mathbb{R} \setminus [a, b) = A$. Para ver que A é aberto, observe que

$$A = \mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty) = \left(\bigcup_{n < a} [n, a) \right) \cup \left(\bigcup_{m > b} [b, m) \right).$$

Como $U \cap A = \emptyset$ por construção, isso mostra que a reta real munida com a topologia de Sorgenfrey é um espaço topológico regular. Como esse espaço topológico também é T_1 (ver Exercício 16.2), então ele é T_3 .

- Topologia usual. Como a topologia usual da reta real é induzida por uma métrica, segue do Exemplo 18.5 que esse espaço topológico é regular e T_3 .
- Topologia do Exercício 3.1. Considere o aberto básico $(2, \infty)$ e defina o fechado $Z := (-\infty, 2] = \mathbb{R} \setminus (2, \infty)$. Depois, considere o ponto $x := 4 \notin Z$. Vamos mostrar que o único aberto que contém Z é $\mathbb{R}$. De fato, se A for um aberto que contém Z , então para todo $z \in Z$, existe um aberto básico (a_z, ∞) tal que $z \in (a_z, \infty) \subseteq A$. Isso significa que, para todo $z \leq 2$, existe $a_z < z$ tal que $(a_z, \infty) \subseteq A$. Consequentemente, $\mathbb{R} \subseteq A$. Isso implica que a reta real munida da topologia construída no Exercício 3.1 não é um espaço topológico regular.
- Topologia coenumerável. Sejam x e y dois pontos distintos de $\mathbb{R}$. Como $\{y\}$ é um conjunto enumerável, então $Z := \{y\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$; e como $x \neq y$, então $x \notin Z$. Suponha que existam uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ e um aberto A de $\mathbb{R}$ tal que $\{y\} \subseteq A$. Como U° e A são abertos não vazios de $\mathbb{R}$, então $\mathbb{R} \setminus U^\circ$ e $\mathbb{R} \setminus A$ são conjuntos enumeráveis. Logo, $\mathbb{R} \setminus (U^\circ \cap A) = (\mathbb{R} \setminus U^\circ) \cup (\mathbb{R} \setminus A)$ também é um conjunto enumerável. Como $\mathbb{R}$ não é um conjunto enumerável, então $U^\circ \cap A$ não pode ser o conjunto vazio e, consequentemente, $U \cap A$ também não pode ser vazio. Isso significa que não existem uma vizinhança de x e um aberto contendo $\{y\}$ que sejam disjuntos. Portanto, a reta real munida da topologia coenumerável é um espaço topológico que não é regular.

- Topologia cofinita. A demonstraco de que a reta real munida da topologia cofinita é um espaço topológico que não   regular é completamente análoga   demonstraco acima. Sejam x e y dois pontos distintos de $\mathbb{R}$. Como $\{y\}$   um conjunto finito, então $Z := \{y\}$   um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$; e como $x \neq y$, então $x \notin Z$. Suponha que existam uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ e um aberto A de $\mathbb{R}$ tal que $\{y\} \subseteq A$. Como U° e A são abertos não vazios de $\mathbb{R}$, então $\mathbb{R} \setminus U^\circ$ e $\mathbb{R} \setminus A$ são conjuntos finitos. Logo, $\mathbb{R} \setminus (U^\circ \cap A) = (\mathbb{R} \setminus U^\circ) \cup (\mathbb{R} \setminus A)$ também   um conjunto finito. Como $\mathbb{R}$ não é um conjunto finito, então $U^\circ \cap A$ não pode ser o conjunto vazio e, conseqüentemente, $U \cap A$ também não pode ser vazio. Isso significa que não existem uma vizinhança de x e um aberto contendo $\{y\}$ que sejam disjuntos. Portanto, a reta real munida da topologia cofinita é um espaço topológico que não   regular.
- Topologia trivial. Dado $x \in \mathbb{R}$, como o único fechado em relação à topologia trivial que não cont m x é $\emptyset$, então podemos escolher $U = X$ e $A = \emptyset$. De fato, X   uma vizinhança de x , $\emptyset$ é um conjunto aberto que cont m $\emptyset$ e $X \cap \emptyset = \emptyset$. Portanto, a reta real munida da sua topologia trivial é um espaço topológico regular. No entanto, como os pontos de $\mathbb{R}$ não são fechados em relação à topologia trivial, esse espaço não   T_1 e, conseqüentemente, não   T_3 . $\square$

Passamos agora a dois resultados estruturais sobre regularidade. O primeiro fornece uma caracterização de espaços regulares: um espaço   regular se, e somente se, admite uma base para a sua topologia formada por subconjuntos fechados.

Proposição 18.6. Um espaço topológico não vazio (X, τ)   regular se, e somente se, para todo ponto $x \in X$, existe uma base de vizinhanças de x que consiste de subconjuntos fechados de X .

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que X seja regular. Queremos mostrar que, para todo ponto $x \in X$, existe uma base de vizinhanças de x que consiste de subconjuntos fechados de X . Para isso, comece fixando $x \in X$. Vamos construir uma base de vizinhanças para x , $\{W_U \mid U \in \mathcal{U}_x\}$, onde cada W_U é um subconjunto fechado de X .

Para construir os subconjuntos W_U , comece lembrando que, para cada vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$, temos que $x \in U^\circ$. Assim, se definirmos $Z_U := X \setminus U^\circ$, temos que Z é um subconjunto fechado de X e $x \notin Z_U$. Como X   um espaço regular por hipótese, existem uma vizinhança $V_U \in \mathcal{U}_x$ e um aberto A_U tais que $Z_U \subseteq A_U$ e $V_U \cap A_U = \emptyset$. Defina $W_U := \overline{V_U}$. Vamos mostrar que $\{W_U \mid U \in \mathcal{U}_x\}$   uma base de vizinhanças de x . Para começar, observe que W_U é uma vizinhança de x , porque V_U é uma vizinhança de x e $V_U \subseteq \overline{V_U} = W_U$. Depois, observe que, para toda vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$, temos que $W_U \subseteq U$. De fato, como A_U é um subconjunto aberto e $V_U \cap A_U = \emptyset$, então

$$W_U = \overline{V_U} \subseteq X \setminus A_U \subseteq X \setminus Z_U = U^\circ \subseteq U.$$

Isso mostra que $\{W_U \mid U \in \mathcal{U}_x\}$   uma base de vizinhanças de x formada por subconjuntos fechados de X .

Para mostrar a parte *se*, suponha que, para todo $x \in X$, exista uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ de x consistindo de subconjuntos fechados. Queremos mostrar que X é um espaço topológico regular. Para isso, fixe $x \in X$ e um subconjunto fechado Z de X tal que $x \notin Z$. Queremos construir uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ e um aberto A de X tais que $Z \subseteq A$ e $U \cap A = \emptyset$. Para isso, comece observando que, como Z é fechado, então $X \setminus Z$ é aberto; e como $x \notin Z$, então $x \in (X \setminus Z)$. Isso implica que $(X \setminus Z)$ é uma vizinhança de x . Como $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x , então existe $U \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in U \subseteq (X \setminus Z)$. Como U é fechado por hipótese, então $X \setminus U$ é aberto; e como $U \subseteq (X \setminus Z)$, então $Z \subseteq (X \setminus U)$. Assim, se definirmos $A := X \setminus U$, teremos que U é uma vizinhança de x , A é um aberto de X , $Z \subseteq A$ e $U \cap A = \emptyset$. Isso mostra que X é regular. $\square$

Exercício 18.2. Use o resultado acima para determinar quais topologias em um conjunto com dois elementos satisfazem o axioma de regularidade e quais não satisfazem.

Resolução (Celso). Dado um conjunto $X = \{a, b\}$ com dois elementos, a menos de homeomorfismos, existem apenas três topologias possíveis nesse conjunto. Vamos considerá-las separadamente.

- Topologia trivial: $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$. Nesse caso, temos que $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_b = \{X\}$. Como X é fechado, se tomarmos os próprios sistemas de vizinhanças como as bases de vizinhanças verificamos a existência de bases formadas por fechados. Assim, nesse caso, o espaço topológico (X, τ_1) é regular.
- Topologia de Sierpinski: $\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Nesse caso, temos que $\mathcal{U}_a = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Logo, pela definição de base de vizinhanças, $\{a\}$ deve ser um elemento de qualquer base de vizinhanças de a . Como $\{a\}$ não é fechado, concluímos que não existe uma base de vizinhanças de a formada por fechados. Assim, nesse caso, o espaço topológico (X, τ_2) não é regular.
- Topologia discreta: $\tau_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Nesse caso, temos que $\mathcal{U}_a = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ e $\mathcal{U}_b = \{\{b\}, \{a, b\}\}$. Assim, tanto para a , quanto para b , podemos tomar o próprio sistema de vizinhanças como uma base de vizinhanças formada por fechados (pois todo subconjunto de X é fechado em relação a essa topologia). Assim, nesse caso, o espaço topológico (X, τ_3) também é regular. $\square$

O próximo resultado mostra que subespaços topológicos de espaços regulares são regulares e que produtos de espaços regulares também são regulares.

Proposição 18.7. (a) Sejam X um espaço topológico não vazio e S um subespaço topológico não vazio de X . Se X for regular, então S também é regular.

(b) Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço produto $\prod_{i \in I} X_i$ é regular se, e somente se, os espaços topológicos X_i são regulares para todos os $i \in I$.

Demonstração. (a) Sejam Z um subconjunto fechado de S e $s \in S \setminus Z$. Pela Proposição 7.6(b), existe um subconjunto fechado $\tilde{Z}$ em X tal que $Z = S \cap \tilde{Z}$.

Como $s \notin Z$ e $s \in S$, então $s \notin \tilde{Z}$. Daí e da hipótese de que X é regular, segue que existem uma vizinhança $\tilde{U} \in \mathcal{U}_{s,X}$ e um subconjunto aberto $\tilde{A}$ de X tais que $\tilde{Z} \subseteq \tilde{A}$ e $\tilde{U} \cap \tilde{A} = \emptyset$. Assim, se definirmos $U := S \cap \tilde{U}$ e $A := S \cap \tilde{A}$, teremos: que $U \in \mathcal{U}_{s,S}$ (pela Proposição 7.8(b)), que A é aberto em S (pela Definição 7.2), que $Z = S \cap \tilde{Z} \subseteq S \cap \tilde{A} = A$, e que $U \cap A = (S \cap \tilde{U}) \cap (S \cap \tilde{A}) = \emptyset$. Isso mostra que S é regular.

- (b) Para mostrar a parte *somente se*, suponha que o espaço produto $X := \prod_{i \in I} X_i$ seja regular. Queremos mostrar que os espaços X_i são regulares para todos os $i \in I$. Para isso, fixe $i \in I$. Queremos mostrar que X_i é regular. Para isso, fixe um subconjunto fechado Z_i de X_i e um ponto $x_i \in X_i \setminus Z_i$. Vamos construir uma vizinhança $U_i \in \mathcal{U}_{x_i, X_i}$ e um subconjunto aberto A_i de X_i tais que $Z_i \subseteq A_i$ e $U_i \cap A_i = \emptyset$.

Para isso, comece observando que, como Z_i é fechado em X_i e π_i é contínua, então $Z := \pi_i^{-1}(Z_i)$ é fechado em $\prod_{i \in I} X_i$. Depois, observe que, como $x_i \notin Z_i$, então $\pi_i^{-1}(x_i) \cap Z = \emptyset$. Fixe $\chi \in \pi_i^{-1}(x_i)$. Como $\prod_{i \in I} X_i$ é um espaço regular por hipótese, então existem uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_{\chi, X}$ e um subconjunto aberto A de X tais que $Z \subseteq A$ e $U \cap A = \emptyset$. Vamos mostrar que $U_i := \pi_i(U)$ é uma vizinhança de x_i , que $A_i := \pi_i(A)$ é um subconjunto aberto de X_i que contém Z_i e que $U_i \cap A_i = \emptyset$.

Para mostrar que U_i é uma vizinhança de x_i , comece observando que, como U é uma vizinhança de χ , então existe um aberto básico $B \in \mathcal{B}_\Pi$ tal que $\chi \in B \subseteq U$. Como $B \in \mathcal{B}_\Pi$, então para cada $i \in I$, existe um aberto B_i em X_i tal que $B = \prod_{i \in I} B_i$. Em particular, $\pi_i(B) = B_i$ é um subconjunto aberto de X_i . Além disso, como $\chi \in B \subseteq U$, então $x_i = \pi_i(\chi) \in \pi_i(B) \subseteq \pi_i(U) = U_i$. Isso mostra que U_i é uma vizinhança de x_i . Para mostrar que A_i é um aberto de X_i que contém Z_i , lembre que $A_i = \pi_i(A)$, que $Z_i = \pi_i(Z)$, que A é aberto que contém Z , e que π_i é uma função aberta (ver Exercício 9.4). Para mostrar que $U_i \cap A_i = \emptyset$, comece lembrando que $A_i = \pi_i(A)$, que A contém Z , e que $Z = \pi_i^{-1}(Z_i)$. Isso implica que se $a_i \in A_i$, então todo $\alpha \in \pi_i^{-1}(a_i)$ pertence a A . Em particular, se existisse $a_i \in U_i \cap A_i$, então também existiria $\alpha \in \pi_i^{-1}(a_i)$ tal que $\alpha \in U \cap A$. Como $U \cap A = \emptyset$, tal a_i não pode existir, ou seja, $U_i \cap A_i = \emptyset$.

Para mostrar a parte *se*, suponha que X_i seja regular para todo $i \in I$. Pela Proposição 18.6, para todo $i \in I$ e todo ponto $x_i \in X_i$, existe uma base de vizinhanças de x_i formada por subconjuntos fechados de X_i . Daí e do Exercício 9.2, segue que todo ponto em $\prod_{i \in I} X_i$ admite uma base de vizinhanças formada por subconjuntos fechados de $\prod_{i \in I} X_i$. Assim, segue da Proposição 18.6 que $\prod_{i \in I} X_i$ também é um espaço regular. $\square$

Como consequência imediata da proposição acima e da Proposição 16.6, obtemos que as mesmas relações valem para o axioma T_3 .

Corolário 18.8. (a) Sejam X um espaço topológico não vazio e S um subespaço topológico não vazio de X . Se X for T_3 , então S também é T_3 .

- (b) Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço produto $\prod_{i \in I} X_i$ é T_3 se, e somente se, os espaços topológicos X_i são T_3 para todos os $i \in I$.

Demonstração. Esse resultado segue diretamente das Proposições 18.7 e 16.6. $\square$

Para encerrar esta aula, apresentamos três exercícios. O primeiro estabelece quais das topologias no plano Cartesiano são regulares. O segundo estabelece condições sobre uma função que garantem que a imagem de um espaço regular (resp. T_3) seja regular (resp. T_3). O terceiro fortalece a separação entre um ponto e um fechado em espaços regulares, mostrando que os abertos separadores podem ser escolhidos com fechos disjuntos.

Exercício 18.3. Use os resultados dessa aula para determinar quais das topologias no plano construídas na Seção 3.3 são regulares e quais não são.

Resolução (Daniel). • Topologia trivial, $\tau = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\}$. Seja Z um conjunto fechado em τ , então $Z = \emptyset$ ou $Z = \mathbb{R}^2$. Se $Z = \mathbb{R}^2$, então $\mathbb{R}^2 \setminus Z = \emptyset$, ou seja, não existe nenhum $x \in \mathbb{R}^2 \setminus Z$. Se definirmos $Z = \emptyset$, então podemos tomar $A_1 = \emptyset$ e $A_2 = \mathbb{R}^2$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$. Isso mostra que, nesse caso, $(\mathbb{R}^2, \tau)$ é regular. No entanto, como os pontos de $\mathbb{R}^2$ não são fechados, esse espaço topológico não é T_1 e, conseqüentemente, não é T_3 .

- Topologia de Zariski. Note que o conjunto $Z = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ é fechado em relação à topologia de Zariski, dado que é o zero do polinômio y . Além disso, o ponto $p = (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus Z$. Suponha que existissem um conjunto aberto A tal que $Z \subseteq A$ e uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_p$ tal que $A \cap U = \emptyset$. Em particular, isso implicaria que $A \cap U^\circ = \emptyset$ ou, equivalentemente, que $(\mathbb{R}^2 \setminus A) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus U^\circ) = \mathbb{R}^2$. Como A e U° são abertos, então $\mathbb{R}^2 \setminus A$ e $\mathbb{R}^2 \setminus U^\circ$ seriam fechados de $\mathbb{R}^2$. Assim, pela construção da topologia de Zariski, existiriam polinômios p e $q \in \mathbb{R}[x, y]$ tais que $\mathbb{R}^2 \setminus A = V(p)$ e $\mathbb{R}^2 \setminus U^\circ = V(q)$. Assim,

$$\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus A) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus U^\circ) = V(p) \cup V(q) = V(pq).$$

Como o único polinômio cujo conjunto de zeros é $\mathbb{R}^2$ é o polinômio nulo, isso implicaria que $pq = 0$ ou, equivalentemente, que $p = 0$ ou $q = 0$. No primeiro caso, nós teríamos que $V(p) = \mathbb{R}^2$, o que contradiria o fato de que $A = \mathbb{R}^2 \setminus V(p)$ é não vazio. No segundo caso, nós teríamos que $V(q) = \mathbb{R}^2$, o que contradiria o fato de que $x \in \mathbb{R}^2 \setminus V(q)$. Isso mostra que $\mathbb{R}^2$ não pode ser um espaço regular quando munido da topologia de Zariski.

- Topologia usual. Como a topologia usual advém de uma métrica, segue do Exemplo 19.4 que o plano $\mathbb{R}^2$ munido da sua topologia usual é um espaço topológico regular e T_3 .
- Topologia lexicográfica. Pelo Exercício 8.2, o plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ munido da topologia lexicográfica é igual ao produto da reta real $\mathbb{R}$ munida das topologias métrica e discreta. Pelo Corolário 18.8, o produto é um espaço topológico T_3 se, e somente se, cada uma das suas componentes é um espaço topológico T_3 .

Pelo Exercício 18.1, a reta real é um espaço topológico T_3 quando munida das topologias métrica e discreta. Isso mostra que plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ munido da topologia lexicográfica é um espaço topológico T_3 .

- Topologia discreta, $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Nesse caso, se Z for um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$ e x for um ponto de $\mathbb{R}^2$ que não pertence a Z , então $U := \{x\}$ é uma vizinhança (aberta) de x e $A := Z$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ tal que $Z \subseteq A$ e $U \cap A = \emptyset$. Isso mostra que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ é um espaço topológico regular. Além disso, como todo subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ é aberto e fechado com relação à topologia discreta, em particular, todo subconjunto com apenas um elemento é fechado. Pela Proposição 16.5, isso significa que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ é um espaço topológico T_1 e, conseqüentemente, T_3 . $\square$

Exercício 18.4. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Mostre que:

- Se X for um espaço regular e f for contínua, aberta e sobrejetora, então Y também é regular.
- Se X é um espaço T_3 e f for contínua, aberta, fechada e sobrejetora, então Y também é T_3 .

Exercício 18.5. Seja X um espaço topológico regular. Mostre que, para todo fechado $Z \subseteq X$ e todo $x \notin Z$, existem abertos $U, V \subseteq X$ tais que $Z \subseteq U$, $x \in V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

AULA 19

O principal objetivo desta aula é apresentar os chamados espaços topológicos normais e T_4 , que constituem o último degrau na hierarquia de axiomas de separação estudada nesta disciplina. Após introduzir as definições e verificar a posição dessa classe na hierarquia (todo espaço T_4 é T_3), exploraremos exemplos concretos e investigaremos de que modo a normalidade se comporta em relação a subespaços, produtos e imagens por funções contínuas. O principal resultado da aula é o chamado Lema de Urysohn, resultado que caracteriza os espaços normais em termos da existência de funções contínuas que separam fechados disjuntos.

19.1. Espaços T_4 e normais. Vamos começar definindo espaços normais e T_4 .

Definição 19.1 (de espaço normal e T_4). Um espaço topológico não vazio X é dito **normal** quando, para quaisquer dois fechados disjuntos $Z_1, Z_2 \subseteq X$, existem abertos disjuntos $A_1, A_2 \subseteq X$ tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Um espaço topológico não vazio X é dito **T_4** quando X é normal e T_1 .

Observação 19.2. Todo espaço topológico T_4 é T_3 . De fato, se X for um espaço topológico T_4 , em particular, X é T_1 . Pela Proposição 16.5, isso significa que os pontos de X são fechados. Além disso, como X é normal, então para todo subconjunto fechado $Z \subseteq X$ e todo ponto $x \notin Z$, existem abertos disjuntos $A_1, A_2 \subseteq X$ tais que $Z \subseteq A_1$ e $\{x\} \subseteq A_2$. Isso implica que $A_2 \in \mathcal{U}_x$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ou seja, que X é regular.

A definição de espaço normal e a observação acima mostram que a normalidade é uma propriedade de separação mais forte do que a regularidade: todo espaço T_4 é T_3 , mas a recíproca não vale em geral. Para desenvolver mais intuição sobre a definição acima, vamos examinar os espaços topológicos com dois pontos, nos quais é possível verificar diretamente a normalidade (ou a sua ausência) para cada topologia.

Exemplo 19.3. Considere um conjunto com dois elementos, $X = \{a, b\}$. Lembre que, a menos de homeomorfismos, as únicas topologias em X são: a trivial, a de Sierpinski e a discreta. Vamos determinar quais delas são normais e quais são T_4 :

- Topologia trivial. Como X munido da topologia trivial não é T_1 , então X não é T_4 . No entanto, X munido da topologia trivial é normal. De fato, observe que se Z_1 e Z_2 são fechados disjuntos de X então $Z_1 = \emptyset$ ou $Z_2 = \emptyset$. No primeiro caso, os abertos $A_1 = \emptyset$ e $A_2 = X$ satisfazem $Z_1 \subseteq A_1$, $Z_2 \subseteq A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; e no segundo caso, os abertos $A_1 = X$ e $A_2 = \emptyset$ satisfazem $Z_1 \subseteq A_1$, $Z_2 \subseteq A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Isso mostra que esse é um exemplo de espaço topológico normal que não é T_4 (nem T_3 , nem Hausdorff).
- Topologia de Sierpinski. Considere a topologia de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Como $\overline{\{a\}} = X$, o ponto a não é fechado e, conseqüentemente, esse espaço topológico não é T_1 . Assim, X também não é T_4 . No entanto, X é normal. De fato, observe que, se $Z_1, Z_2 \subseteq X$ são fechados disjuntos, então $Z_1 = \emptyset$ ou $Z_2 = \emptyset$. No primeiro caso, os abertos $A_1 = \emptyset$ e $A_2 = X$ satisfazem $Z_1 \subseteq A_1$, $Z_2 \subseteq A_2$

e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; e no segundo caso, os abertos $A_1 = X$ e $A_2 = \emptyset$ satisfazem $Z_1 \subseteq A_1$, $Z_2 \subseteq A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Isso mostra que esse espaço topológico é normal e, conseqüentemente, também mostra que existem espaços topológicos normais que não são regulares (ver Exercício 18.2).

- Topologia discreta. Lembre que, neste caso, todo subconjunto de X é aberto e fechado. Em particular, esse espaço topológico é T_1 . Agora vamos mostrar que ele também é normal. Se $Z_1, Z_2 \subseteq X$ são subconjuntos fechados disjuntos, então $A_1 = Z_1$ e $A_2 = Z_2$ são subconjuntos abertos disjuntos. Isso mostra que X é normal e, conseqüentemente, T_4 .

As topologias trivial e de Sierpinski fornecem exemplos de espaços normais que não são T_4 , enquanto a topologia discreta fornece o exemplo mais simples de espaço T_4 . Uma classe muito mais ampla de exemplos é fornecida pelos espaços métricos, que, como veremos a seguir, são sempre T_4 .

Exemplo 19.4. Todo espaço métrico é T_4 . De fato, suponha que (X, d) é espaço métrico. Pelo Exemplo 16.4, sabemos que X é T_1 . Então, para mostrar que X é T_4 , basta verificar que X é normal.

Para mostrar que X é normal, fixe dois fechados disjuntos Z_1 e Z_2 de X . Depois, para cada $x \in X$, defina

$$r_{1,x} := \frac{1}{2} \inf \{d(x, z) \mid z \in Z_1\} \quad \text{e} \quad r_{2,x} := \frac{1}{2} \inf \{d(x, z) \mid z \in Z_2\}.$$

Defina também $A_1 := \bigcup_{z \in Z_1} B(z, r_{2,z})$ e $A_2 := \bigcup_{z \in Z_2} B(z, r_{1,z})$. Observe que A_1, A_2 são abertos em X , que $Z_1 \subseteq A_1$ e que $Z_2 \subseteq A_2$ por construção. Para concluir a demonstração de que X é T_4 , vamos usar contradição para mostrar que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. De fato, se existisse $x \in A_1 \cap A_2$, isso significa que existiriam $z_1 \in Z_1$ e $z_2 \in Z_2$ tais que $d(x, z_1) < r_{2,z_1}$ e $d(x, z_2) < r_{1,z_2}$. Assim, teríamos que

$$d(z_1, z_2) \leq d(z_1, x) + d(x, z_2) < r_{2,z_1} + r_{1,z_2} \leq \frac{1}{2}d(z_1, z_2) + \frac{1}{2}d(z_2, z_1) = d(z_1, z_2).$$

Como isso não faz sentido, então não pode existir tal $x \in A_1 \cap A_2$. Isso mostra que X é T_4 .

Os exemplos acima trataram de espaços topológicos específicos. O exercício a seguir também: o principal objetivo desse exercício é determinar quais topologias em $\mathbb{R}$ satisfazem o axioma de normalidade e o axioma T_4 .

Exercício 19.1. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ munido das seguintes topologias: discreta, topologia K (Exercício 3.2), de Sorgenfrey (Exemplo 3.5), topologia usual (métrica), cofinita (Exemplo 2.3), coenumerável (Exemplo 13.6), topologia do Exercício 3.1, e topologia trivial. Determine quais dessas topologias são normais e quais são T_4 .

Resolução (Mateus). (a) Topologia discreta. Sejam $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{R}$ dois subconjuntos fechados e disjuntos em relação à topologia discreta de $\mathbb{R}$. Na topologia discreta, por definição, todos os subconjuntos são abertos. Portanto, podemos definir $A_1 := Z_1$ e $A_2 := Z_2$. Como consequência direta, A_1 e A_2 são conjuntos abertos,

disjuntos (pois $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$) e satisfazem $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Portanto, a topologia discreta na reta é normal. Como ela também é T_1 pelo Exercício 16.2, então ela é T_4 .

- (b) Topologia K. Como a topologia K na reta real é T_1 (ver Exercício 16.2), se ela fosse normal, então ela seria T_4 . Pela Observação 19.2, isso implicaria que a reta real munida da topologia K seria um espaço topológico T_3 , o que contradiria o resultado do Exercício 18.1. Portanto concluímos que a topologia K em $\mathbb{R}$ não é T_4 e não é normal.
- (c) Topologia de Sorgenfrey. Sejam Z_1 e Z_2 dois subconjuntos fechados e disjuntos em $\mathbb{R}$. Vamos construir dois abertos disjuntos A_1 e A_2 tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Para cada $x \in Z_1$, como Z_2 é fechado e $x \notin Z_2$, o ponto x pertence ao aberto $\mathbb{R} \setminus Z_2$. Pela definição da base da topologia de Sorgenfrey, existe um aberto básico $[x, x + r_x)$ totalmente contido em $\mathbb{R} \setminus Z_2$ para cada $x \in Z_1$. Da mesma forma, para cada $y \in Z_2$, como Z_1 é fechado e $y \notin Z_1$, existe um aberto básico $[y, y + s_y)$ tal que $[y, y + \epsilon_y) \cap Z_1 = \emptyset$. Assim, definimos

$$A_1 = \bigcup_{x \in Z_1} [x, x + r_x) \quad \text{e} \quad A_2 = \bigcup_{y \in Z_2} [y, y + s_y).$$

Por construção, A_1 e A_2 são abertos tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Agora mostremos que A_1 e A_2 são disjuntos. Se existisse $z \in A_1 \cap A_2$, então existiriam $x \in Z_1$ e $y \in Z_2$ tais que $z \in [x, x + r_x)$ e $z \in [y, y + s_y)$. Isso implicaria que $x \in [y, y + s_y)$, ou que $y \in [x, x + r_x)$. No primeiro caso, isso contradiria a hipótese de que $[x, x + r_x) \cap Z_2 = \emptyset$; e no segundo caso, isso contradiria a hipótese de que $[y, y + s_y) \cap Z_1 = \emptyset$. Portanto nenhum dos dois casos podem ocorrer e, consequentemente, A_1 e A_2 devem ser disjuntos. Isso mostra que a reta real munida da topologia Sorgenfrey é normal. Como ela também é T_1 (pelo Exercício 16.2), então ela é T_4 também.

- (d) Topologia usual. Pelo Exemplo 19.4, todo espaço métrico é T_4 . Como a topologia usual da reta real é induzida de uma métrica, segue que ela é normal e T_4 .
- (e) Topologia cofinita. Como a topologia cofinita na reta é T_1 (ver Exercício 16.2), se ela fosse normal, então ela seria T_4 . Pela Observação 19.2, isso implicaria que a reta real munida da topologia cofinita seria um espaço topológico T_3 , o que contradiria o resultado do Exercício 18.1. Portanto concluímos que a topologia cofinita em $\mathbb{R}$ não é T_4 e não é normal.
- (f) Topologia do Exercício 3.1. Assim como no caso anterior, como a topologia do Exercício 3.1 na reta real é T_1 (ver Exercício 16.2), se ela fosse normal, então ela seria T_4 . Pela Observação 19.2, isso implicaria que a reta real munida da topologia do Exercício 3.1 seria um espaço topológico T_3 , o que contradiria o resultado do Exercício 18.1. Portanto concluímos que a topologia do Exercício 3.1 em $\mathbb{R}$ não é T_4 e não é normal.
- (g) Topologia coenumerável. Assim como nos dois casos anteriores, como a topologia coenumerável na reta real é T_1 (ver Exercício 16.2), se ela fosse normal,

então ela seria T_4 . Pela Observação 19.2, isso implicaria que a reta real munida da topologia coenumerável seria um espaço topológico T_3 , o que contradiria o resultado do Exercício 18.1. Portanto concluímos que a topologia coenumerável em $\mathbb{R}$ não é T_4 e não é normal.

- (h) Topologia trivial. Lembre que, em relação à topologia trivial, os únicos abertos da reta real são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. Logo, seus únicos fechados também são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$. Assim, se Z_1 e Z_2 são fechados disjuntos, então $Z_1 = \emptyset$ ou $Z_2 = \emptyset$. No primeiro caso, podemos tomar $A_1 = \emptyset$ e $A_2 = \mathbb{R}$, dois abertos disjuntos tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. No segundo caso, podemos tomar $A_1 = \mathbb{R}$ e $A_2 = \emptyset$, dois abertos disjuntos tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Portanto, em relação à topologia trivial, a reta real é normal. Mas ela não é T_4 , por não ser T_1 (ver Exercício 16.2). $\square$

Agora que nós desenvolvemos alguns exemplos, vamos passar a investigar como a normalidade se comporta sob as construções topológicas mais comuns: subespaços, produtos e imagens. A primeira proposição mostra que a normalidade é herdada por subespaços fechados.

Proposição 19.5. Sejam X um espaço topológico não vazio e $S \subseteq X$ um subespaço topológico não vazio. Se X for normal e S for fechado em X , então S também é normal.

Demonstração. Sejam Z_1 e Z_2 dois fechados disjuntos de S . Como S é fechado em X , então pela Proposição 7.6(c), Z_1, Z_2 são fechados em X . Como X é normal, então existem abertos disjuntos $A_1, A_2 \subseteq X$ tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Além disso, como $Z_1, Z_2 \subseteq S$, então $Z_1 \subseteq S \cap A_1$ e $Z_2 \subseteq S \cap A_2$. Isso mostra que S é um espaço topológico normal. $\square$

A hipótese de que S é fechado é essencial na proposição acima: subespaços arbitrários de espaços normais não precisam ser normais. O exemplo a seguir ilustra essa situação de forma explícita, exibindo um espaço normal e um subespaço seu que não é normal.

Exemplo 19.6. Considere um conjunto $X = \{0, a, b, 1\}$ munido da topologia τ dada por $\{\emptyset, \{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, a, b\}, X\}$. Vamos verificar que (X, τ) é um espaço topológico normal. Para isso, observe que os fechados de X são: $\emptyset, \{1\}, \{1, a\}, \{1, b\}, \{1, a, b\}$ e X . (Em particular, X não é T_1 , porque $\{a\}$ e $\{b\}$ não são fechados.) Como todo fechado não vazio contém 1, então não existem fechados não vazios disjuntos em X . Assim como no Exemplo 19.3, isso implica que (X, τ) é normal.

Agora, vamos verificar que o subconjunto $S = \{0, a, b\}$, munido da topologia induzida $\tau_S = \{\emptyset, \{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, S\}$, não é um espaço topológico normal. Primeiro, observe que os fechados de S são: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ e S . (Em particular, S também não é T_1 , porque $\{0\}$ não é fechado.) Depois, considere os fechados disjuntos $\{a\}$ e $\{b\}$. Como todos os abertos que contêm a também contêm 0 e todos os abertos que contêm b também contêm 0, então não existem abertos disjuntos de S que separem $\{a\}$ de $\{b\}$. Isso mostra que S não é normal.

Além do comportamento em relação a subespaços, é natural investigar como a normalidade se comporta em relação a produtos. A proposição a seguir mostra que a normalidade do produto implica a normalidade de cada fator, embora a recíproca seja falsa em geral, como veremos no exercício subsequente.

Proposição 19.7. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Se o espaço produto $\prod_{i \in I} X_i$ for normal, então os espaços topológicos X_i são normais para todos os $i \in I$.

Demonstração. Suponha que $X = \prod_{i \in I} X_i$ é normal e fixe $i \in I$. Queremos mostrar que X_i também é normal. Para isso, fixe dois fechados disjuntos Z_1 e Z_2 de X_i . Como $\pi_i : X \rightarrow X_i$ é contínua por hipótese, então $\pi_i^{-1}(Z_1)$ e $\pi_i^{-1}(Z_2)$ são fechados em X . Além disso, como Z_1 e Z_2 também são disjuntos por hipótese, então

$$\pi_i^{-1}(Z_1) \cap \pi_i^{-1}(Z_2) = \pi_i^{-1}(Z_1 \cap Z_2) = \emptyset,$$

ou seja, $\pi_i^{-1}(Z_1)$ e $\pi_i^{-1}(Z_2)$ são (fechados) disjuntos. Daí e da hipótese que X é normal, segue que existem abertos disjuntos A_1 e A_2 de X tais que $\pi_i^{-1}(Z_1) \subseteq A_1$ e $\pi_i^{-1}(Z_2) \subseteq A_2$. Defina $B_1 := \pi_i(A_1)$ e $B_2 := \pi_i(A_2)$. Para concluir essa demonstração, vamos mostrar que B_1 e B_2 são abertos disjuntos de X_i tais que $Z_1 \subseteq B_1$ e $Z_2 \subseteq B_2$. Isso vai implicar que X_i é normal.

Para mostrar que B_1 e B_2 são abertos, basta lembrar que A_1 e A_2 são abertos e que π_i também é aberta (ver Exercício 9.4). Para mostrar que $Z_1 \subseteq B_1$, basta observar que $Z_1 = \pi_i(\pi_i^{-1}(Z_1)) \subseteq \pi_i(A_1) = B_1$, porque π_i é sobrejetora e $\pi_i^{-1}(Z_1) \subseteq A_1$. Analogamente, temos que $Z_2 = \pi_i(\pi_i^{-1}(Z_2)) \subseteq \pi_i(A_2) = B_2$. Para mostrar que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, vamos usar contradição. Suponha que existisse $x \in B_1 \cap B_2$. Isso significaria que existiriam $\chi_1 \in A_1$ e $\chi_2 \in A_2$ tais que $\chi_1(i) = x = \chi_2(i)$. Como $\pi_i^{-1}(Z_2) \subseteq A_2$, então quaisquer que fossem as outras coordenadas $\chi_1(j)$, teríamos que $\chi_1 \in A_2$. Isso contradiria o fato que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Isso mostra que B_1 e B_2 são abertos disjuntos de X_i tais que $Z_1 \subseteq B_1$ e $Z_2 \subseteq B_2$; o que implica que X_i é normal. $\square$

A recíproca da proposição acima é falsa: o exercício a seguir exhibe um espaço normal cujo quadrado não é normal, mostrando que a normalidade não se preserva por produtos em geral.

Exercício 19.2. Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido da topologia de Sorgenfrey (ver Exemplo 3.5). Mostre que $\mathbb{R}$ é normal e que o produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ não é normal.

Resolução (Roger). Lembre do Exercício 19.1 que a reta real munida da topologia de Sorgenfrey é um espaço topológico normal. Vamos mostrar que o produto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ não é um espaço topológico normal quando cada um dos seus fatores estiver munido da topologia de Sorgenfrey. Para isso, vamos construir dois subconjuntos fechados e disjuntos $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tais que: se A_1 e A_2 forem dois abertos tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$, então $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Defina:

$$Z_1 := \{(q, -q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid q \in \mathbb{Q}\} \quad \text{e} \quad Z_2 := \{(x, -x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Vamos começar mostrando que Z_1 e Z_2 são fechados em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para isso, vamos mostrar que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, o conjunto $L_{x_0} := \{(x, -x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq x_0\}$ é fechado em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Como $Z_1 = \bigcap_{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} L_x$ e $Z_2 = \bigcap_{x \in \mathbb{Q}} L_x$, isso implicará que Z_1 e Z_2 são fechados em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para mostrar que os conjuntos L_{x_0} são fechados, comece fixando $x_0 \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que, para todo $(x, y) \notin L_{x_0}$, existe um aberto básico da topologia produto $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in B$ e $B \cap L_{x_0} = \emptyset$. Pela Proposição 5.8, isso implicará que o complementar de L_{x_0} é aberto ou, equivalentemente, que L_{x_0} é fechado.

Para mostrar que, para todo $(x, y) \notin L_{x_0}$, existe um aberto básico da topologia produto $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in B$ e $B \cap L_{x_0} = \emptyset$, vamos começar fixando $(x, y) \notin L_{x_0}$. Agora considere os seguintes três casos:

- $(x, y) = (x_0, -x_0)$. Nesse caso, o aberto básico $[x_0, x_0 + 1) \times [-x_0, -x_0 + 1)$ não intersecta L_{x_0} . De fato, se $(a, b) \in [x_0, x_0 + 1) \times [-x_0, -x_0 + 1)$, então $a \geq x_0$ e $b \geq -x_0$. Assim, $a \geq x_0 \geq -b$, ou seja, $a = x_0 = -b$ ou $a > -b$. Em ambos os casos, $(a, b) \notin L_{x_0}$.
- $x > -y$. Nesse caso, o aberto básico $[x, x + 1) \times [y, y + 1)$ não intersecta L_{x_0} . De fato, se $(a, b) \in [x, x + 1) \times [y, y + 1)$, então $a \geq x$ e $b \geq y$. Assim, nesse caso, $a \geq x > -y \geq -b$. Isso implica que $(a, b) \notin L_{x_0}$.
- $x < -y$. Nesse caso, denote $r := -\frac{1}{2}(x + y)$. O aberto básico $[x, x + r) \times [y, y + r)$ não intersecta L_{x_0} . De fato, se $(a, b) \in [x, x + r) \times [y, y + r)$, então

$$a < x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y) = -\frac{1}{2}(y - x) = -\left(y - \frac{1}{2}(x + y)\right) \leq -b.$$

Isso mostra que os conjuntos L_{x_0} são fechados em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e, como consequência, os conjuntos Z_1 e Z_2 também são fechados em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Agora vamos mostrar que, se A_1 e A_2 forem dois abertos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$, então $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Para isso, comece fixando dois abertos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Como A_1 é aberto, para todo ponto $(q, q) \in Z_1 \subseteq A_1$, existem $\delta_{1,q}, \delta_{2,q} > 0$ tais que o aberto básico $[q, q + \delta_{1,q}) \times [-q, -q + \delta_{2,q})$ está contido em A_1 . Analogamente, para todo ponto $(x, -x) \in Z_2$, existem $\epsilon_{1,x}, \epsilon_{2,x} > 0$ tais que $[x, x + \epsilon_{1,x}) \times [-x, -x + \epsilon_{2,x}) \subseteq A_2$. Agora observe que, se $\epsilon_{2,x} > x - q$ para algum $x \in (q, q + \delta_{1,q})$, então $(x, -q) \in A_1 \cap A_2$; e se $\delta_{2,q} > q - x$ para algum $q \in (x, x + \epsilon_{2,x})$, então $(q, -x) \in A_1 \cap A_2$. Como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$, isso sempre acontece.

Isso implica que o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ não é um espaço topológico normal, quando cada $\mathbb{R}$ é munido com a topologia de Sorgenfrey □

Além de subespaços e produtos, podemos investigar como a normalidade se comporta sob imagens de funções. Como mostrará o próximo resultado, a normalidade se preserva por imagens de funções contínuas e fechadas.

Proposição 19.8. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Se X for normal, f for sobrejetora, contínua e fechada, então Y também é normal.

Demonstração. Suponha que X é normal e que $f : X \rightarrow Y$ é uma função sobrejetora, contínua e fechada. Queremos mostrar que Y também é normal. Para isso, fixe dois fechados disjuntos Z_1 e Z_2 de Y . Como $f : X \rightarrow Y$ é contínua por hipótese, então $f^{-1}(Z_1)$ e $f^{-1}(Z_2)$ são fechados em X . Além disso, como Z_1 e Z_2 são disjuntos por hipótese, então $f^{-1}(Z_1) \cap f^{-1}(Z_2) = f^{-1}(Z_1 \cap Z_2) = \emptyset$, ou seja, $f^{-1}(Z_1)$ e $f^{-1}(Z_2)$ são disjuntos também. Daí e da hipótese de que X é normal, segue que existem abertos disjuntos $A_1, A_2 \subseteq X$ tais que $f^{-1}(Z_1) \subseteq A_1$ e $f^{-1}(Z_2) \subseteq A_2$. Defina $B_1 := Y \setminus f(X \setminus A_1)$ e $B_2 := Y \setminus f(X \setminus A_2)$. Para concluir essa demonstração, vamos verificar que B_1 e B_2 são abertos disjuntos de Y tais que $Z_1 \subseteq B_1$ e $Z_2 \subseteq B_2$. Isso vai implicar que Y é normal.

Para mostrar que B_1 e B_2 são abertos, basta observar que $f(X \setminus A_1)$ e $f(X \setminus A_2)$ são fechados, porque A_1 e A_2 são abertos e f é fechada. Para mostrar que $Z_1 \subseteq B_1$, precisamos mostrar que: para todo $z \in Z_1$, não existe $x \in X \setminus A_1$ tal que $f(x) = z$; ou equivalentemente, se $x \in X \setminus A_1$, então $f(x) \notin Z_1$. De fato, se $x \notin A_1$, como $f^{-1}(Z_1) \subseteq A_1$, então $x \notin f^{-1}(Z_1)$. Isso significa exatamente que $f(x) \notin Z_1$. Analogamente, temos que $Z_2 \subseteq B_2$. Para mostrar que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, observe que

$$\begin{aligned} B_1 \cap B_2 &= (Y \setminus f(X \setminus A_1)) \cap (Y \setminus f(X \setminus A_2)) \\ &= Y \setminus (f(X \setminus A_1) \cup f(X \setminus A_2)) \\ &= Y \setminus f(X \setminus A_1 \cup X \setminus A_2) \\ &= Y \setminus f(X \setminus (A_1 \cap A_2)) \\ &= Y \setminus f(X) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

pois A_1, A_2 são disjuntos e f é sobrejetora. Isso mostra que B_1 e B_2 são abertos disjuntos de Y tais que $Z_1 \subseteq B_1$ e $Z_2 \subseteq B_2$; o que implica que Y é normal. $\square$

A hipótese de que f é fechada no resultado anterior é, novamente, essencial: a continuidade sozinha não é suficiente para preservar a normalidade. O exemplo a seguir exhibe uma função contínua sobrejetora de um espaço normal em um espaço que não é normal, confirmando que a normalidade pode ser destruída por imagens de funções que não são fechadas.

Exemplo 19.9. Vamos mostrar que uma imagem por função contínua de um espaço topológico normal não necessariamente é normal. Primeiro, considere o intervalo fechado $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ munido da topologia usual e considere o conjunto $S = \{0, a, b\}$ munido da topologia $\tau_S = \{\emptyset, \{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, S\}$. Considere também a função $f : [-1, 1] \rightarrow S$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x = -1, \\ 0, & \text{se } -1 < x < 1, \\ b, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Observe que $[-1, 1]$ é um espaço topológico normal (Exemplo 19.4 e Proposição 19.5). Observe também que f é uma função sobrejetora e contínua. De fato, as imagens

inversas dos abertos de S por f são:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset, & f^{-1}(\{0\}) &= (-1, 1), & f^{-1}(\{0, a\}) &= [-1, 1] = [-1, 1] \cap (-2, 1), \\ f^{-1}(\{0, b\}) &= (-1, 1] = [-1, 1] \cap (-1, 2) & \text{e} & & f^{-1}(S) &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

Além disso, lembre do Exemplo 19.6 que S é um espaço topológico que não é normal.

As três proposições anteriores admitem versões análogas para o axioma T_4 , que reunimos no corolário a seguir.

Corolário 19.10. (a) Sejam X um espaço topológico não vazio e $S \subseteq X$ um subespaço topológico não vazio. Se X é T_4 e $S \subseteq X$ é fechado, então S também é T_4 .

(b) Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. Se o espaço topológico $\prod_{i \in I} X_i$ for T_4 , então X_i é T_4 para todo $i \in I$.

(c) Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Se X for T_4 e f for sobrejetora, contínua e fechada, então Y também é T_4 .

Demonstração. As demonstrações seguem direto da Proposição 16.6 junto com a Proposição 19.5 (parte (a)), Proposição 19.7 (parte (b)) e Proposição 19.8 (parte (c)). $\square$

Até este ponto, a normalidade foi caracterizada puramente em termos de separação de fechados por abertos. O resultado a seguir oferece uma caracterização de natureza mais analítica: um espaço topológico é normal se, e somente se, quaisquer dois fechados disjuntos podem ser separados por uma função contínua com valores reais. Esse resultado é o principal desta aula e constitui uma das pedras angulares da topologia geral.

Teorema 19.11 (Lema de Urysohn). Sejam X um espaço topológico e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido da sua topologia usual. O espaço X é normal se, e somente se, para quaisquer fechados não vazios disjuntos $Z_1, Z_2 \subseteq X$, existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z_1) = \{0\}$ e $f(Z_2) = \{1\}$.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que X seja um espaço topológico normal e fixe dois fechados disjuntos $Z_1, Z_2 \subseteq X$. A função $f : X \rightarrow [0, 1]$ que nós construiremos será quase como uma distância em relação ao conjunto Z_1 . Então a ideia da demonstração é ir construindo, para cada elemento q de um certo subconjunto denso de $[0, 1]$, um subconjunto aberto correspondente a q (como se fossem bolas abertas de raio q racional em torno de um ponto), que contém Z_1 e está contido em $X \setminus Z_2$. O valor da função f em um ponto x vai ser definida como sendo o menor q para o qual o ponto x está contido no aberto correspondente a q (como uma distância).

Para colocar essa ideia em prática, comece fixando o seguinte subconjunto enumerável denso de $[0, 1]$:

$$Q := \{i/2^n \mid i \in \{1, \dots, 2^n\}\}.$$

Agora, para cada $q \in Q$, nós vamos definir subconjuntos A_q que nos auxiliarão na definição da função f . Comece definindo o aberto $A_1 := X \setminus Z_2$. Em seguida, observe que, como X é normal, Z_1 é fechado em X , A_1 é aberto em X e $Z_1 \subseteq A_1$, então existe um aberto $A_0 \subseteq X$ tal que $Z_1 \subseteq A_0 \subseteq \overline{A_0} \subseteq A_1$ (ver Exercício 19.3). Analogamente, como X é normal, $\overline{A_0}$ é fechado em X , A_1 é aberto em X e $\overline{A_0} \subseteq A_1$, então existe um aberto $A_{1/2} \subseteq X$ tal que $\overline{A_0} \subseteq A_{1/2} \subseteq \overline{A_{1/2}} \subseteq A_1$. De maneira análoga, usando a hipótese de que X é normal e indução em n , podemos construir um subconjunto aberto $A_q \subseteq X$ para cada $q \in Q$, de forma que $\overline{A_q} \subseteq A_{q'}$ para todos os $q, q' \in Q$ tais que $q < q'$.

Agora, vamos definir a função $f : X \rightarrow [0, 1]$ como sendo dada por

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{q \in Q \mid x \in A_q\}, & \text{se } x \in A_q \text{ para algum } q \in Q, \\ 1, & \text{se } x \notin A_q \text{ para todo } q \in Q. \end{cases}$$

Queremos mostrar que $f(Z_1) = \{0\}$, que $f(Z_2) = \{1\}$ e que f é uma função contínua. Como $Z_1 \subseteq A_0$, então $f(Z_1) = \{0\}$. Como $A_q \subseteq A_1$ para todo $q \in Q$ e $A_1 = X \setminus Z_2$, então $Z_2 \cap A_q \subseteq Z_2 \cap A_1 = \emptyset$, ou seja, $x \notin A_q$ para todo $x \in Z_2$ e $q \in Q$. Isso implica que $f(Z_2) = \{1\}$.

Agora, vamos mostrar que f é contínua. Para isso, para todo $x \in X$ e todo $\epsilon > 0$, vamos construir $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \cap [0, 1]$. Pelo Lema 6.5, isso significará que f é contínua. Vamos analisar três casos separadamente:

- $f(x) = 0$. Nesse caso, queremos construir uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq [0, \epsilon)$. Para isso, comece observando que, como Q é denso em $[0, 1]$, existe $r \in Q$ tal que $r \in (0, \epsilon)$. Depois, observe que, como $r > 0 = f(x)$, então $x \in A_r$. Assim, se tomarmos $U = A_r$, obteremos que U é uma vizinhança de x e que $f(u) \leq r < \epsilon$ para todo $u \in U$.
- $f(x) = 1$. Nesse caso, queremos construir uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq (1 - \epsilon, 1]$. Para isso, comece observando que, como Q é denso em $[0, 1]$, existe $r \in Q$ tal que $r \in (1 - \epsilon, 1)$. Depois, observe que, como $r < 1 = f(x)$, então $x \notin \overline{A_r}$. Assim, se tomarmos $U = X \setminus \overline{A_r}$, obteremos que U é uma vizinhança de x e que $f(u) \geq r > 1 - \epsilon$ para todo $u \in U$.
- $f(x) \in (0, 1)$. Nesse caso, queremos construir uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \cap [0, 1]$. Para simplificar, vamos definir

$$\epsilon' := \min\{\epsilon, f(x), 1 - f(x)\}$$

e construir uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $f(U) \subseteq (f(x) - \epsilon', f(x) + \epsilon')$. Para isso, comece observando que, como Q é denso em $[0, 1]$, existe $r_1 \in Q$ tal que $r_1 \in (f(x) - \epsilon', f(x))$ e existe $r_2 \in Q$ tal que $r_2 \in (f(x), f(x) + \epsilon')$. Depois, observe que, como $r_1 < f(x)$, então $x \notin \overline{A_{r_1}}$ e, como $f(x) < r_2$, então $x \in A_{r_2}$. Assim, se tomarmos $U = A_{r_2} \setminus \overline{A_{r_1}}$, obteremos que U é uma vizinhança (aberta) de x e que $1 - \epsilon' < r_1 \leq f(u) \leq r_2 < f(x) + \epsilon'$ para todo $u \in U$.

Em todos os casos, nós conseguimos construir uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ tal que

$$f(U) \subseteq (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \cap [0, 1].$$

Pelo Lema 6.5, isso implica que a função f é contínua e conclui a demonstração da parte *somente se*.

Para mostrar a parte *se*, suponha que, para quaisquer dois fechados disjuntos Z_1 e Z_2 de X , exista uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z_1) = \{0\}$ e $f(Z_2) = \{1\}$. Como f é contínua e $[0, \frac{1}{2}) = [0, 1] \cap (-\infty, \frac{1}{2})$ é aberto em $[0, 1]$, então $A_1 := f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ é um aberto de X que contém Z_1 . Analogamente, $A_2 := f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ é um aberto de X que contém Z_2 . Além disso, observe que

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}[0, 1/2) \cap f^{-1}(1/2, 1] = f^{-1}([0, 1/2) \cap (1/2, 1]) = \emptyset.$$

Ou seja, A_1 e A_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de X tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Isso mostra que X é normal. $\square$

Os exercícios a seguir complementam o conteúdo desta aula. O primeiro revisita a definição de normalidade e apresenta caracterizações alternativas equivalentes, análogas às aquelas discutidas para a regularidade; o segundo explora a interação entre regularidade, segundo axioma de enumerabilidade e normalidade, estabelecendo um resultado clássico.

Exercício 19.3. Dado um espaço topológico X , mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) X é normal.
- (b) Para todos os subconjuntos Z_1 e Z_2 fechados disjuntos de X , existem abertos $A_1, A_2 \subseteq X$ tais que $Z_1 \subseteq A_1$, $Z_2 \subseteq A_2$ e $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$.
- (c) Para todo subconjunto fechado $Z \subseteq X$ e todo subconjunto aberto $A \subseteq X$ tal que $Z \subseteq A$, existe um subconjunto aberto $V \subseteq X$ tal que $Z \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A$.

Resolução (Zyon). (a) $\Rightarrow$ (b): Suponha que X seja normal. Considere dois fechados disjuntos, $Z_1, Z_2 \subseteq X$. Como X é normal, existem dois abertos disjuntos, $A_1, A_2 \subseteq X$, tais que $Z_1 \subseteq A_1$ e $Z_2 \subseteq A_2$. Note que $X \setminus A_2$ também é fechado e que $(X \setminus A_2) \cap Z_1 = \emptyset$. Como X é normal, existem abertos disjuntos, $B_1, B_2 \subseteq X$, tais que $X \setminus A_2 \subseteq B_1$ e $Z_1 \subseteq B_2$. Analogamente, como Z_2 e $X \setminus A_1$ são fechados disjuntos e X é normal, existem abertos disjuntos, $C_1, C_2 \subseteq X$, tais que $Z_2 \subseteq C_1$ e $X \setminus A_1 \subseteq C_2$. Observe que $Z_1 \subseteq C_1$ e $Z_2 \subseteq B_2$. Vamos mostrar que $\overline{C_1} \cap \overline{B_2} = \emptyset$.

Para mostrar que $\overline{C_1} \cap \overline{B_2} = \emptyset$, comece observando que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, ou seja, que $C_1 \subseteq (X \setminus C_2)$. Como C_2 é aberto (por construção), então $X \setminus C_2$ é fechado e, consequentemente, $\overline{C_1} \subseteq (X \setminus C_2)$ (ver Lema 5.13(a)). Além disso, como $(X \setminus A_1) \subseteq C_2$, então $\overline{C_1} \subseteq (X \setminus C_2) \subseteq A_1$. Analogamente, $\overline{B_2} \subseteq (X \setminus B_1) \subseteq A_2$. Isso implica que

$$\overline{C_1} \cap \overline{B_2} \subseteq A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Com isso, concluímos a demonstração de que C_1 e B_2 são subconjuntos abertos de X tais que $Z_1 \subseteq C_1$, $Z_2 \subseteq B_2$ e $\overline{C_1} \cap \overline{B_2} = \emptyset$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Suponha que, para todos os subconjuntos fechados e disjuntos, $Z_1, Z_2 \subseteq X$, existam abertos $A_1, A_2 \subseteq X$ tais que $Z_1 \subseteq A_1$, $Z_2 \subseteq A_2$ e $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$. Sejam Z um subconjunto fechado e A um subconjunto aberto de X tais que $Z \subseteq A$. Denote

$Z_1 := Z$ e $Z_2 := X \setminus A$. Como Z é fechado, então Z_1 é fechado; como A é aberto, então Z_2 é fechado; e como $Z \subseteq A$, então $Z_1 \cap Z_2 = Z \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Pela hipótese, existem abertos $V_1, V_2 \subseteq X$ tais que $Z_1 \subseteq V_1$, $Z_2 \subseteq V_2$ e $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \emptyset$. Assim, se denotarmos $V := V_1$, teremos que:

$$Z = Z_1 \subseteq V_1 = V \subseteq \overline{V} \quad \text{e} \quad \overline{V} = \overline{V_1} \subseteq (X \setminus \overline{V_2}) \subseteq (X \setminus Z_2) = A.$$

(c) $\Rightarrow$ (a): Suponha que X seja um espaço topológico no qual, para todo subconjunto fechado Z e todo subconjunto aberto A tais que $Z \subseteq A$, exista um subconjunto aberto V tal que $Z \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A$. Vamos mostrar que X é normal. Para isso, sejam Z_1 e Z_2 dois fechados disjuntos de X . Denote $Z := Z_1$ e $A := X \setminus Z_2$. Como Z_1 é fechado, então Z é fechado; como Z_2 também é fechado, então A é aberto; e como $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, então $Z = Z_1 \subseteq (X \setminus Z_2) = A$. Pela hipótese, existe um aberto V tal que $Z_1 \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A$. Note que $A_1 := V$ é um aberto que contém Z_1 , que $A_2 := X \setminus \overline{V}$ é um aberto que contém $X \setminus A = Z_2$, e que $A_1 \cap A_2 = V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$. Isso mostra que X é um espaço normal. $\square$

Exercício 19.4. Se X for um espaço topológico regular e segundo enumerável, mostre que X é normal.

AULA 20

Nessa aula, estudaremos mais duas classes de espaços topológicos: os espaços *completamente regulares* e os *espaços de Tychonoff*. Esses espaços surgem naturalmente como uma generalização dos espaços normais: enquanto o Lema de Urysohn garante, em espaços normais, a separação de quaisquer dois fechados disjuntos por uma função contínua, os espaços completamente regulares satisfazem uma versão mais fraca dessa condição, exigindo apenas a separação de um ponto de um fechado que não o contém. Veremos que essa classe de espaços possui propriedades de hereditariedade e estabilidade por produtos que os espaços normais não possuem, o que os torna especialmente relevantes. Encerraremos a aula com uma caracterização dos espaços completamente regulares em termos da topologia fraca induzida pelas funções contínuas limitadas definidas sobre eles.

Durante toda essa aula, vamos considerar o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido da sua topologia usual e o intervalo fechado $[0, 1]$ munido da topologia induzida como subespaço de $\mathbb{R}$.

20.1. Espaços completamente regulares e de Tychonoff. Vamos começar apresentando a definição dos espaços completamente regulares e de Tychonoff.

Definição 20.1 (de espaço completamente regular e de Tychonoff). Um espaço topológico X é dito **completamente regular** quando, para todo subconjunto fechado não vazio $Z \subseteq X$ e todo $x \in X \setminus Z$, existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z) = 0$ e $f(x) = 1$. Um espaço topológico X é dito **espaço de Tychonoff** quando X é completamente regular e T_1 .

Com essa definição em mãos, podemos relacionar os espaços completamente regulares e de Tychonoff com as outras classes de espaços topológicos já estudadas. As duas observações a seguir estabelecem essas relações. A primeira mostra que os espaços T_4 são, em particular, espaços de Tychonoff e a segunda mostra que os espaços completamente regulares são, em particular, regulares.

Observação 20.2. Todo espaço T_4 é de Tychonoff. De fato, se X é um espaço topológico T_4 , então X é T_1 . Assim, pela Proposição 16.5, o subconjunto $\{x\}$ é fechado para todo $x \in X$. Além disso, se X for T_4 , então X é normal. Assim, pelo Lema de Urysohn (Teorema 19.11), para quaisquer fechados disjuntos $Z_1, Z_2 \subseteq X$, existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z_1) = 0$ e $f(Z_2) = 1$. Em particular, tomando $Z_2 = \{x\}$ com $x \notin Z_1$, vemos que X é um espaço de Tychonoff.

Em vista da observação acima, os espaços de Tychonoff ocupam uma posição intermediária na hierarquia dos axiomas de separação: todo espaço T_4 é de Tychonoff e, como veremos na observação a seguir, todo espaço de Tychonoff é T_3 . Por essa razão, os espaços de Tychonoff são frequentemente chamados de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ na literatura.

Observação 20.3. Todo espaço completamente regular é regular. De fato, suponha que X seja um espaço topológico completamente regular, considere um subconjunto

fechado $Z \subseteq X$ e um elemento $x \in X \setminus Z$. Como X é completamente regular, então existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z) = 0$ e $f(x) = 1$. Defina $A := f^{-1} [0, \frac{1}{2})$ e $U := f^{-1} (\frac{1}{2}, 1]$. Observe que, como f é contínua e $[0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1]$ são abertos em $[0, 1]$, então A e U são abertos em X . Além disso, $Z \subseteq A$, $x \in U$ e $A \cap U = f^{-1} [0, \frac{1}{2}) \cap f^{-1} (\frac{1}{2}, 1] = f^{-1} ([0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$. Isso mostra que X é regular. Consequentemente, todo espaço de Tychonoff também é T_3 .

Para melhor compreender o alcance das definições acima, vejamos alguns exemplos concretos de espaços que são completamente regulares ou de Tychonoff. O primeiro exemplo examina as topologias sobre um conjunto de dois elementos, ilustrando que a completamente regularidade não é garantida mesmo em espaços muito simples, e que ela é estritamente mais forte do que a normalidade em geral.

Exemplo 20.4. Considere o conjunto $X = \{a, b\}$. Lembre que, a menos de homeomorfismos, as únicas topologias em X são: a trivial, a de Sierpinski e a discreta. Vamos determinar quais delas são completamente regulares e quais são de Tychonoff:

- Topologia trivial. Como X munido da topologia trivial não é T_1 , então X não é de Tychonoff. No entanto, X é completamente regular. De fato, como X não tem nenhum subconjunto fechado próprio, então X é completamente regular por vacuidade.
- Topologia de Sierpinski. Considere a topologia de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Pelo Exercício 18.2, esse espaço não é regular. Assim, pela Observação 20.3, esse espaço não pode ser completamente regular. Isso mostra um exemplo de espaço topológico normal (ver Exemplo 19.3) que não é completamente regular.
- Topologia discreta. Lembre do Exemplo 19.3 que o conjunto X munido da topologia discreta é T_4 . Assim, pela Observação 20.2, ele também é um espaço de Tychonoff.

O exemplo anterior deixa em aberto a questão da relação entre espaços regulares e completamente regulares: o espaço de Sierpinski, sendo normal (e portanto regular), mostrou que ser normal não implica ser completamente regular. Também existem espaços completamente regulares que *não são* regulares. No entanto, como as construções desses exemplos são técnicas, elas não serão apresentadas nessa aula.

Os exemplos anteriores mostram que os espaços métricos, sendo T_4 , são em particular de Tychonoff. Esse fato é suficientemente importante para ser registrado separadamente.

Exemplo 20.5. Todo espaço métrico é um espaço de Tychonoff. Pelo Exemplo 19.4, temos que todo espaço métrico é T_4 ; e pela Observação 20.2, temos que todo espaço T_4 é de Tychonoff. Isso implica que todo espaço métrico é de Tychonoff.

O resultado acima pode ser visto de forma mais explícita e construtiva por meio do exercício a seguir, que pede uma demonstração direta da completamente regularidade de espaços métricos sem recorrer ao Lema de Urysohn.

Exercício 20.1. Sejam (X, d) um espaço métrico, $Z \subseteq X$ um conjunto fechado e $x \in X \setminus Z$. Use a função distância $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ para construir explicitamente uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z) = \{0\}$ e $f(x) = 1$.

Resolução (Celso). Sejam (X, d) um espaço métrico, Z um fechado em X e x um ponto em $X \setminus Z$. Queremos construir uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z) = \{0\}$ e $f(x) = 1$. Vamos começar considerando a função

$$g : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad g(y) = \inf_{z \in Z} d(y, z).$$

Intuitivamente, $g(y)$ é a distância do ponto y ao conjunto Z . Para formalizar essa intuição, observe que $g(y) \geq 0$ para todo $y \in X$. Observe também que $g(y) = 0$ se, e somente se, $y \in Z$. De fato, se $y \in Z$, então $d(y, y) = 0$ e portanto, $\inf_{z \in Z} d(y, z) = 0$. Por outro lado, se $\inf_{z \in Z} d(y, z) = 0$, então existe $z_n \in Z$ tal que $d(y, z_n) < 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de Z que converge para y . Isso implica que $y \in \overline{Z}$. Como Z é fechado, isso garante que $y \in Z$. Observe ainda que g é contínua, porque é o ínfimo de funções contínuas.

Isso mostra que g é uma função contínua tal que $g(Z) = \{0\}$. No entanto, $g(x)$ não necessariamente é igual a 1. Assim, para obter uma função $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z) = \{0\}$ e $f(x) = 1$, vamos renormalizar g . De maneira concreta, defina

$$f : X \rightarrow [0, 1] \quad \text{por} \quad f(y) = \frac{g(y)}{g(y) + d(y, x)}.$$

Vamos verificar que f está bem definida, é contínua, que $f(Z) = \{0\}$ e que $f(x) = 1$.

Para verificar que f está bem definida, comece lembrando que $g(y) \geq 0$ e $d(y, x) \geq 0$. Assim, $g(y) + d(y, x) = 0$ se, e somente se, $g(y) = 0$ e $d(y, x) = 0$. Depois, lembre que $g(y) = 0$ se, e somente se, $y \in Z$. Lembre também que $d(y, x) = 0$ se, e somente se, $y = x$. Assim, $g(y) + d(y, x) = 0$ se, e somente se, $x = y \in Z$. Como $x \notin Z$ por hipótese, obtemos que $g(y) + d(y, x) \neq 0$ para todo $y \in X$.

Para concluir a verificação de que f está bem definida, vamos justificar que sua imagem está contida no intervalo $[0, 1]$. Por um lado, $f(y) \geq 0$, porque $g(y) \geq 0$ e $d(y, x) \geq 0$ para todo $y \in X$. Por outro lado, $f(y) \leq 1$, porque $g(y) \leq g(y) + d(y, x)$ para todo $y \in X$. Isso mostra que, de fato, $0 \leq \frac{g(y)}{g(y) + d(y, x)} \leq 1$ para todo $y \in X$.

Isso mostra que f está bem definida. Para verificar que f é contínua, comece lembrando que g e $d(-, x)$ são funções contínuas (ver Exercício 6.2). Isso implica que o denominador da f , a função $g(-) + d(-, x)$, é contínua (ver Exercício 6.6(a)). Além disso, lembre que $g(y) + d(y, x) > 0$ para todo $y \in X$. Assim, f pode ser vista como o produto de duas funções contínuas, que também é contínua (ver Exercício 6.6(b)).

Agora, observe que $f(Z) = \{0\}$. De fato, como $g(y) = 0$ para todo $y \in Z$, então $f(y) = \frac{g(y)}{g(y) + d(y, x)} = 0$ para todo $y \in Z$. Para finalizar a demonstração, constatamos que $f(x) = 1$. De fato, como $d(x, x) = 0$, então $f(x) = \frac{g(x)}{g(x)} = 1$. Isso mostra que f é uma função contínua $X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z) = \{0\}$ e $f(x) = 1$. $\square$

Exercício 20.2. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ munido das seguintes topologias: discreta, topologia K (Exercício 3.2), de Sorgenfrey (Exemplo 3.5), topologia usual (métrica),

cofinita (Exemplo 2.3), coenumerável (Exemplo 13.6), topologia do Exercício 3.1, e topologia trivial. Determine quais desses espaços topológicos são completamente regulares e de Tychonoff.

Resolução (Daniel). Comece lembrando da Observação 20.3 que, se um espaço topológico não é regular, então ele não é completamente regular. Depois, lembre do Exercício 19.1 que a reta real munida da topologia K , da topologia cofinita, da topologia coenumerável e da topologia do Exercício 3.1 não é regular. Assim a reta real não é completamente regular quando munida da topologia K , da topologia cofinita, da topologia coenumerável e da topologia do Exercício 3.1.

Depois, lembre da Observação 20.2 que todo espaço T_4 é um espaço de Tychonoff. Pelo Exercício 19.1, a reta real é um espaço T_4 quando munida das topologias usual, de Sorgenfrey e discreta. Assim, a reta real é um espaço de Tychonoff quando munida da sua topologia usual, da topologia de Sorgenfrey e da topologia discreta.

Para completar esse exercício, vamos mostrar que a reta real é um espaço completamente regular quando munida da topologia trivial. De fato, como os únicos abertos de $\mathbb{R}$ em relação à topologia trivial são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$, então os únicos fechados são $\mathbb{R}$ e $\emptyset$. Logo, não existe nenhum fechado não vazio $Z \subseteq \mathbb{R}$ para o qual exista um ponto $x \in \mathbb{R} \setminus Z$. Assim, por vacuidade, a reta real é um espaço completamente regular quando munida da topologia trivial. $\square$

Com os exemplos e observações anteriores em mente, passamos agora ao estudo das propriedades de estabilidade dos espaços completamente regulares e de Tychonoff. Duas propriedades fundamentais que os espaços normais não possuem em geral são a hereditariedade para subespaços e a estabilidade por produtos arbitrários. Os dois resultados a seguir mostram que os espaços completamente regulares e de Tychonoff, ao contrário dos espaços normais, possuem ambas essas propriedades.

Proposição 20.6. Sejam X um espaço topológico e S um subespaço topológico de X . Se X é completamente regular, então S também é completamente regular.

Demonstração. Sejam $Z \subseteq S$ um subconjunto fechado e $s \in S \setminus Z$. Como S é um subespaço de X , pela Proposição 7.6(b), existe um fechado $\tilde{Z} \subseteq X$ tal que $Z = S \cap \tilde{Z}$. Observe que, como $s \notin Z$, então $s \notin \tilde{Z}$. Agora, como X é completamente regular por hipótese, então existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(\tilde{Z}) = 0$ e $f(s) = 1$. Assim, pela Proposição 7.10(a), restrição $f|_S : S \rightarrow [0, 1]$ é uma função contínua tal que $f|_S(Z) = 0$ e $f|_S(s) = 1$. Isso mostra que S é completamente regular. $\square$

A proposição acima garante que subespaços topológicos de espaços completamente regulares herdam essa propriedade. O resultado a seguir, complementar o anterior e mostra que a produtos de espaços completamente regulares são completamente regulares.

Proposição 20.7. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e considere o produto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto. Os espaços topológicos X_i são completamente regulares se, e somente se, X é completamente regular.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que os espaços X_i sejam completamente regulares para todo $i \in I$. Depois, fixe um subconjunto fechado próprio Z de X e um ponto $\chi \in X \setminus Z$. Vamos construir uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z) = 0$ e $f(\chi) = 1$. Como Z é fechado, então $X \setminus Z$ é aberto no espaço produto. Pela definição da topologia produto, para cada $i \in I$, existe um subconjunto aberto $A_i \subseteq X_i$ tal que $\chi \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq (X \setminus Z)$. Além disso, existe um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $A_j \neq X_j$ somente se $j \in J$. Para cada $j \in J$, defina $Z_j := X_j \setminus A_j$, observe que Z_j é fechado em X_j e que $\chi(j) \notin Z_j$. Daí e da hipótese que os espaços X_j são completamente regulares, segue que existem funções contínuas $f_j : X_j \rightarrow [0, 1]$ tais que $f_j(Z_j) = 0$ e $f_j(\chi(j)) = 1$. Defina $f : X \rightarrow [0, 1]$ como sendo $f(\gamma) = \min\{f_j(\gamma(j)) \mid j \in J\}$. Observe que f é uma função contínua. Observe também que $f(\chi) = 1$, já que $f_j(\chi(j)) = 1$ para todo $j \in J$. Para terminar, observe que $f(Z) = \{0\}$. De fato, se $\zeta \in Z$, então $\zeta(j) \notin A_j$ para algum $j \in J$. Isso implica que $\zeta(j) \in Z_j$ para algum $j \in J$, e consequentemente, que $f_j(\zeta(j)) = 0$. Assim, $f(\zeta) = \min\{f_j(\zeta(j)) \mid j \in J\} = 0$ para todo $\zeta \in Z$.

Para mostrar a parte *se*, suponha que $X = \prod_{i \in I} X_i$ é um espaço topológico completamente regular. Depois, fixe $i \in I$, fixe um subconjunto fechado Z_i de X_i e um ponto $x_i \in X_i \setminus Z_i$. Queremos construir uma função contínua $f : X_i \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z_i) = \{0\}$ e $f(x_i) = 1$. Para isso, comece observando que, como π_i é uma função contínua e Z_i é um subconjunto fechado de X_i , então $\pi_i(Z_i)$ é um subconjunto fechado de X . Observe também que, como $x_i \notin Z_i$, então $\pi_i^{-1}(x_i) \cap \pi_i^{-1}(Z_i) = \emptyset$. Assim, se fixarmos $\chi \in \pi_i^{-1}(x_i)$, teremos que $\pi_i^{-1}(Z_i)$ é um fechado de X que não contém χ . Como X é um espaço completamente regular por hipótese, existe uma função contínua $F : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $F(\pi_i^{-1}(Z_i)) = \{0\}$ e $F(\chi) = 1$. Para induzir uma função $X_i \rightarrow [0, 1]$, comece definindo, para cada $y \in X_i$, um elemento $\tilde{y} \in X$ por:

$$\tilde{y}(j) = \begin{cases} y_i, & \text{se } j = i, \\ \chi(j), & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Depois, defina $f(y) = F(\tilde{y})$. Observe que, se $z \in Z_i$, então $\tilde{z} \in \pi_i^{-1}(Z_i)$ e, consequentemente, $f(z) = F(\tilde{z}) = 0$. Observe também que $f(x_i) = F(\chi) = 1$. Por fim, observe que F é uma função contínua (ver Proposição 9.5). Isso conclui a demonstração de que X_i é um espaço topológico completamente regular. $\square$

As duas proposições anteriores, combinadas com o fato de que subespaços e produtos de espaços T_1 são T_1 , implicam imediatamente o seguinte corolário para espaços de Tychonoff.

Corolário 20.8. (a) Sejam X um espaço topológico e $S \subseteq X$ um subespaço topológico. Se X é Tychonoff, então S também é Tychonoff.

- (b) Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e considere o espaço topológico $X = \prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto. Os espaços X_i são espaços de Tychonoff se, e somente se, X é um espaço de Tychonoff.

Demonstração. A demonstração da parte (a) segue diretamente da Proposição 16.6 e da Proposição 20.6. A demonstração da parte (b) segue diretamente da Proposição 16.6 e da Proposição 20.7. $\square$

Para concluir essa aula, vamos estabelecer uma caracterização dos espaços completamente regulares em termos de funções contínuas limitadas. A ideia central é que, dado um espaço topológico X , a família de todas as funções contínuas limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ determina uma topologia em X , a chamada *topologia fraca* induzida por essas funções. Mostraremos que X ser completamente regular é equivalente ao fato de que essa topologia fraca coincidir com a topologia original de X . Para enunciar esse resultado, vamos começar com as definições necessárias.

Dado um espaço topológico X , uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *limitada* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $-c \leq f(x) \leq c$ para todo $x \in X$. Denote a família de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas limitadas por $C_b(X)$.

Dados um conjunto X , uma família de espaços topológicos $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ e uma família de funções $\{\phi_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$, a *topologia fraca induzida por $\{\phi_i\}_{i \in I}$* é a topologia mais grossa tal que $\phi_i : X \rightarrow Y_i$ é contínua para todo $i \in I$. A família $\{\phi_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i \text{ e } i \in I\}$ é uma subbase para essa topologia.

No caso em que tomamos um espaço topológico X e a família de funções contínuas limitadas, $I = C_b(X)$, a topologia fraca induzida por $C_b(X)$ é, por construção, mais grossa que a topologia original de X . O próximo resultado mostra que essas duas topologias coincidem exatamente quando X é completamente regular.

Proposição 20.9. Um espaço topológico (X, τ) é completamente regular se, e somente se, a topologia τ é a topologia fraca induzida por $C_b(X)$.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que (X, τ) seja um espaço topológico completamente regular. Denote a topologia fraca induzida por $C_b(X)$ por τ_w . Queremos mostrar que $\tau = \tau_w$. Como todas as funções em $C_b(X)$ são contínuas em relação à topologia τ e a topologia τ_w é a topologia mais grossa em X em relação à qual as funções em $C_b(X)$ são contínuas, então $\tau_w \subseteq \tau$. Assim, para completar essa demonstração, basta mostrar que $\tau \subseteq \tau_w$.

Para isso, primeiro lembre que uma subbase de τ_w é dada pela família

$$\mathcal{S}_w = \{\phi^{-1}(U) \mid \phi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua limitada e } U \subseteq \mathbb{R} \text{ é aberto}\}.$$

Em seguida, considere um aberto $A \in \tau$. Se $A = \emptyset$ ou $A = X$, então $A \in \tau_w$ (porque τ_w é uma topologia em X). Caso contrário, $Z := X \setminus A$ é um fechado próprio de X . Como X é completamente regular por hipótese, para cada $a \in A$, existe uma função contínua $f_a : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f_a(Z) = 0$ e $f_a(a) = 1$. Compondo f_a com a inclusão $[0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$, obtemos uma função contínua e limitada $\phi_a : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi_a(Z) = 0$ e $\phi_a(a) = 1$. Observe que $\phi_a^{-1}(0, 2) \in \mathcal{S}_w$ e que $a \in \phi_a^{-1}(0, 2) \subseteq A$, para

todo $a \in A$. Isso implica que $A = \bigcup_{a \in A} \phi_a^{-1}(0, 2) \in \tau_w$; o que mostra que $\tau \subseteq \tau_w$ e, consequentemente, que $\tau = \tau_w$.

Para mostrar a parte *se*, suponha que $\tau = \langle \mathcal{S}_w \rangle$ é a topologia fraca induzida pelas funções contínuas e limitadas. Como nós queremos mostrar que (X, τ) é um espaço completamente regular, fixe um subconjunto fechado $Z \subseteq X$ e um ponto $x \in X \setminus Z$. Como $X \setminus Z$ é aberto e $\tau = \langle \mathcal{S}_w \rangle$, existem uma função contínua e limitada $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ e um intervalo aberto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tais que $x \in \phi^{-1}(a, b) \subseteq X \setminus Z$. Vamos usar essa ϕ para construir uma função $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(Z) = 0$ e $f(x) = 1$.

Primeiro, defina $\phi_+, \phi_- : X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_+(y) := \max\{\phi(y) - a, 0\} \quad \text{e} \quad \phi_-(y) = \max\{b - \phi(y), 0\}.$$

Como ϕ é contínua e limitada, então $\phi_{\pm}$ também são contínuas e limitadas. Além disso, observe que $\phi_{\pm}(y) \geq 0$ para todo $y \in X$ e $\phi_{\pm}(x) > 0$. Assim, podemos definir $f_+, f_- : X \rightarrow [0, 1]$ por

$$f_+(y) = \frac{1}{\phi_+(x)} \min\{\phi_+(x), \phi_+(y)\} \quad \text{e} \quad f_-(y) = \frac{1}{\phi_-(x)} \min\{\phi_-(x), \phi_-(y)\}.$$

Como $\phi_{\pm}$ são contínuas, então $f_{\pm}$ também são contínuas. Além disso, observe que $f_{\pm}(y) \in [0, 1]$ para todo $y \in X$ e que $f_{\pm}(x) = 1$. Portanto, a função $f : X \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(y) = f_-(y)f_+(y)$ é uma função contínua tal que $f(x) = 1$. Para terminar, vamos mostrar que $f(Z) = 0$. Se $z \in Z$, então $z \notin \phi^{-1}(a, b)$; ou seja, $\phi(z) \leq a$ ou $\phi(z) \geq b$. No primeiro caso, segue que $\phi_+(z) = 0$, e consequentemente, que $f_+(z) = 0$. No segundo caso, segue que $\phi_-(z) = 0$, e consequentemente, que $f_-(z) = 0$. Em ambos os casos, temos que $f(z) = f_+(z)f_-(z) = 0$. Isso conclui a demonstração. $\square$

O resultado anterior nos dá uma caracterização dos espaços topológicos completamente regulares em termos da topologia fraca induzida pelas funções contínuas limitadas. Um resultado análogo para os espaços de Tychonoff será demonstrado nas próximas aulas.

Concluimos essa aula com dois exercícios que complementam e aprofundam os resultados apresentados acima. O primeiro pede uma caracterização alternativa dos espaços completamente regulares em termos de funções que separam pontos de fechados de maneira mais geral, sem restringir o contradomínio ao intervalo $[0, 1]$. O segundo estabelece condições para que funções entre espaços topológicos preservem a propriedade de ser completamente regular ou um espaço de Tychonoff.

Exercício 20.3. Sejam X um espaço topológico e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais munido da sua topologia usual. Mostre que X é completamente regular se, e somente se, para todo subconjunto fechado $Z \subseteq X$ e todo $x \in X \setminus Z$, existe uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a < b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = b$ e $f(z) \leq a$ para todo $z \in Z$.

Resolução (Israel). ($\Rightarrow$): Suponha que X seja um espaço topológico completamente regular. Pela Definição 20.1, isso significa que, para todo subconjunto fechado Z de X e todo ponto $x \notin Z$, existe uma função contínua $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(x) = 1$ e $g(Z) = \{0\}$. Assim, fixe um subconjunto fechado $Z \subseteq X$ e um ponto $x \notin Z$. Fixe

também uma função contínua $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(x) = 1$ e $g(Z) = \{0\}$. Denote por ι a função $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\iota(x) = x$. Como $[0, 1]$ é o espaço topológico munido da topologia induzida por $\mathbb{R}$, a imagem inversa por ι de um subconjunto A aberto em $\mathbb{R}$, $\iota^{-1}(A) = [0, 1] \cap A$, é aberta em $[0, 1]$. Isso significa que ι é uma função contínua. Logo, a função $f := \iota \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Além disso, observe que $f(x) = \iota(g(x)) = \iota(1) = 1$ e que $f(z) = \iota(g(z)) = \iota(0) = 0$ para todo $z \in Z$. Ou seja, se tomarmos $a = 0$ e $b = 1$, temos que $f(x) = b$ e $f(z) \leq a$ para todo $z \in Z$.

($\Leftarrow$): Suponha que X seja um espaço topológico tal que, para todo subconjunto fechado $Z \subseteq X$ e todo ponto $x \notin Z$, existam uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e números $a < b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = b$ e $f(z) \leq a$ para todo $z \in Z$. Fixe um subconjunto fechado $Z \subseteq X$, um ponto $x \in X \setminus Z$, uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e números $a < b \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = b$ e $f(z) \leq a$ para todo $z \in Z$. A partir dessa função f , defina a função $g : X \rightarrow [0, 1]$ por

$$g(y) = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{f(y) - a}{b - a} \right\} \right\}.$$

Observe que, como f é contínua e $a < b$, então g é contínua (ver Exercício 6.6). Observe também que, como $f(x) = b$, então

$$g(x) = \min\{1, \max\{0, 1\}\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

Observe, por fim, que, como $f(z) \leq a$ para todo $z \in Z$, então $g(z) = \min\{1, 0\} = 0$ para todo $z \in Z$. Isso mostra que, para todo subconjunto fechado $Z \subseteq X$ e todo ponto $x \in X \setminus Z$, podemos construir uma função contínua $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(x) = 1$ e $g(Z) = \{0\}$. Isso significa exatamente que X é um espaço completamente regular. $\square$

Exercício 20.4. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo.

- (a) Mostre que, se X for completamente regular, então Y é completamente regular.
- (b) Mostre que, se X for um espaço de Tychonoff, então Y é um espaço de Tychonoff.

AULA 21

Nesta aula, estudamos o conceito de compacidade, um dos conceitos centrais da topologia e da análise. A ideia fundamental é capturar, em termos puramente topológicos, a propriedade que faz com que certos espaços se comportem de maneira “finita”, mesmo que contenham infinitos pontos.

Começaremos esta aula definindo espaços compactos e examinando uma série de exemplos, incluindo subconjuntos da reta real. Em seguida, investigaremos como a compacidade interage com outras propriedades topológicas, como ser fechado e ser Hausdorff. Por fim, estudaremos como a compacidade se comporta sob funções contínuas, o que nos permite estabelecer generalizações do Teorema de Bolzano-Weierstrass para espaços topológicos abstratos.

21.1. Espaços compactos. A ideia de compacidade surgiu historicamente da necessidade de generalizar propriedades analíticas dos intervalos fechados e limitados da reta real, como a convergência de sequências. A definição abaixo captura essa propriedade de forma abstrata, tornando-a o ponto de partida para toda a teoria.

Definição 21.1 (de espaço compacto). Dado um espaço topológico (X, τ) , um subespaço K de X é dito **compacto** quando toda cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita; ou seja, para toda subfamília $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, existe um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $K \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$.

O primeiro e mais simples exemplo de subespaço compacto é aquele formado por finitos pontos. Intuitivamente, qualquer cobertura aberta de um conjunto finito já admite uma subcobertura finita pelo simples fato de que cada ponto pode ser coberto individualmente por um único aberto.

Exemplo 21.2. Dado um espaço topológico X , todo subconjunto finito de X é um subconjunto compacto. De fato, suponha que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ seja um subconjunto finito de X e suponha que $\{A_i\}_{i \in I}$ forme uma cobertura aberta de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ou seja, $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de abertos em X tal que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, escolha $i_k \in I$ tal que $x_k \in A_{i_k}$. Por construção, teremos que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_n}$. Isso mostra que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto compacto.

O argumento acima generaliza imediatamente para espaços cuja topologia seja finita: se a própria topologia tem apenas finitos abertos, então qualquer cobertura aberta já é, em si mesma, uma cobertura finita.

Exercício 21.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Mostre que, se τ for finita, então (X, τ) é compacto. Conclua que todo espaço topológico admite alguma topologia em relação à qual ele é compacto.

Resolução (Roger). Suponha que X seja um conjunto e τ seja uma topologia finita em X . Vamos mostrar que toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita. De fato, suponha que $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de abertos tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Como τ é finita, quando eliminamos as repetições, obtemos um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $\cup_{j \in J} A_j = \cup_{i \in I} A_i = X$. Isso significa que o espaço topológico (X, τ) é compacto. $\square$

Os exemplos acima são, de certa forma, triviais: a compacidade decorre diretamente da finitude do conjunto ou da topologia subjacentes. O exemplo a seguir é mais rico, pois trata de espaços infinitos munidos de topologias não-triviais. Primeiro, vamos mostrar que a reta real não é um espaço topológico compacto quando munida da sua topologia usual, mas que os seus intervalos fechados e limitados são.

Exemplo 21.3. Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da sua topologia usual. Vamos mostrar que $\mathbb{R}$ não é compacto. Para isso, considere a cobertura aberta $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} B(0, n)$. Para todo subconjunto finito $J \subseteq \mathbb{N}$, existe $n \in J$ tal que $B(0, j) \subseteq B(0, n)$ para todo $j \in J$. De fato, como J é um conjunto finito, então $n := \max\{j \mid j \in J\}$ satisfaz essa propriedade. Assim, $\cup_{j \in J} B(0, j) \subseteq B(0, n)$. Como $B(0, n) \neq \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a cobertura aberta $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} B(0, n)$ não admite nenhuma subcobertura finita.

Agora vamos mostrar que todo intervalo da forma $[a, b]$ é compacto. Para isso, comece considerando uma cobertura aberta de $[a, b]$, ou seja, uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ tal que $[a, b] \subseteq \cup_{i \in I} A_i$. Depois, defina o conjunto

$$C := \{c \in [a, b] \mid [a, c] \subseteq \cup_{j \in J} A_j \text{ para algum subconjunto finito } J \subseteq I\}.$$

Como $a \in A_i$ para algum $i \in I$, então $C \neq \emptyset$. Além disso, como $C \subseteq [a, b]$ e $[a, b]$ é fechado, então $\tilde{c} := \sup C \in [a, b]$. Vamos mostrar que $\tilde{c} = b$. Isso implicará que existe um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $[a, b] \subseteq \cup_{j \in J} A_j$.

Seja J um subconjunto finito de I tal que $[a, \tilde{c}] \subseteq \cup_{j \in J} A_j$. Escolha $\tilde{j} \in J$ tal que $\tilde{c} \in A_{\tilde{j}}$. Como $A_{\tilde{j}}$ é aberto, então existe $r > 0$ tal que $(\tilde{c} - r, \tilde{c} + r) \subseteq A_{\tilde{j}}$. Portanto existe $c' > \tilde{c}$ tal que $c' \in \cup_{j \in J} A_j$. Como $\tilde{c} = \sup C$, então $\tilde{c} = b$. Caso contrário, existiria $c' \in C$ tal que $c' > \sup C$. Isso mostra que existe um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $[a, b] \subseteq \cup_{j \in J} A_j$, ou seja, que $[a, b]$ é um conjunto compacto.

O exemplo acima mostra que, na topologia usual de $\mathbb{R}$, a compacidade é uma propriedade bastante restritiva. Contudo, ao mudarmos a topologia, o comportamento pode ser radicalmente diferente. O exemplo a seguir ilustra que, em relação à topologia cofinita, a reta real é compacta.

Exemplo 21.4. Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da topologia cofinita. Vamos mostrar que $\mathbb{R}$ é compacto. Para isso, considere uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$, ou seja, uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de abertos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} = \cup_{i \in I} A_i$. Para extrair uma subcobertura finita, escolha $i_0 \in I$ tal que A_{i_0} é não vazio. Se $A_{i_0} = \mathbb{R}$, então já encontramos uma subcobertura finita. Caso contrário, como A_{i_0} é um aberto não vazio, então $\mathbb{R} \setminus A_{i_0}$ é um conjunto finito e não vazio. Denote seus elementos por $x_1, x_2, \dots, x_n$. Para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, escolha $i_k \in I$ tal que $x_k \in A_{i_k}$, e observe que $\mathbb{R} = A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$. Isso mostra que $\{A_i\}_{i \in I}$ admite uma subcobertura finita de $\mathbb{R}$. Usando um argumento análogo, podemos mostrar que, nesse caso, todo subconjunto de $\mathbb{R}$ também é compacto.

Os exemplos acima ilustram a definição de compacidade e algumas de suas propriedades. Os exercícios a seguir exploram alguns outros exemplos, relações e preparam o terreno para os resultados gerais que veremos na sequência dessa aula.

Exercício 21.2. Sejam X um conjunto e τ, τ' duas topologias em X . Mostre que, se (X, τ) for compacto e $\tau' \subseteq \tau$, então (X, τ') também é compacto.

Resolução (Zyon). Suponha que (X, τ) seja um espaço topológico compacto e seja τ' uma topologia em X que é mais grossa que τ . Queremos mostrar que toda cobertura aberta de X em relação à τ' admite uma subcobertura finita. Para isso, seja $\{A_i \in \tau' \mid i \in I\}$ uma família de abertos (em relação à τ') tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Por hipótese, temos que $\tau' \subseteq \tau$. Assim, $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X com relação à τ também. Por hipótese, também temos que X é compacto em relação à τ . Assim, existe um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $X = \bigcup_{j \in J} A_j$. Isso mostra exatamente o que queríamos mostrar, que X é compacto em relação à τ' . $\square$

Exercício 21.3. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ munido das seguintes topologias: discreta, topologia K (Exercício 3.2), de Sorgenfrey (Exemplo 3.5), topologia usual (métrica), cofinita (Exemplo 2.3), coenumerável (Exemplo 13.6), topologia do Exercício 3.1, e topologia trivial. Determine em relação a quais dessas topologias $\mathbb{R}$ é compacto.

Exercício 21.4. Sejam X um espaço topológico e $K \subseteq S$ dois subconjuntos de X . Mostre que, se K for compacto em S , então K é compacto em X .

Resolução (Angie). Suponhamos que K seja um subconjunto compacto de S e que S seja um subespaço topológico de X . Queremos provar que K é compacto em X . Para isso, fixe uma cobertura aberta $\{A_i\}_{i \in I}$ de K , ou seja, uma família de abertos em X tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Como S um subespaço topológico de X (com a topologia induzida), então $A_i \cap S$ é aberto em S para todo $i \in I$. Além disso, como $K \subseteq S$, então $K \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \cap S)$. Ou seja, $\{A_i \cap S\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de K em S . Pela compacidade de K em S , existe um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $K \subseteq \bigcup_{j \in J} (A_j \cap S)$. Logo, $K \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$ também. Isso mostra que K é compacto em X também. $\square$

Os exemplos acima ilustram o conceito de compacidade em diversos espaços topológicos. O resultado a seguir estabelece uma relação entre espaços compactos, fechados e de Hausdorff: em espaços compactos, todo fechado é compacto, e que, em espaços Hausdorff, todo compacto é fechado. Esses dois resultados são complementares e constituem a base para a caracterização dos subconjuntos compactos da reta pelo Teorema de Heine-Borel.

Proposição 21.5. Sejam X um espaço topológico e S um subespaço topológico de X .

- (a) Se X for compacto e S for fechado em X , então S é compacto.
- (b) Se X for Hausdorff e S for compacto, então S é fechado.

Demonstração. (a) Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de S , ou seja, uma família de abertos de X tal que $S \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Como S é fechado por hipótese, então $X \setminus S$ é aberto e, conseqüentemente, $X = (X \setminus S) \cup (\bigcup_{i \in I} A_i)$ é uma cobertura aberta de X . Denote por ∞ um elemento que não pertence a I , denote por $\tilde{I}$ o conjunto $I \sqcup \{\infty\}$, e denote o aberto $X \setminus S$ por A_∞ . Como X é compacto por hipótese, então existe um subconjunto finito $\tilde{J} \subseteq \tilde{I}$ tal que $X = \bigcup_{j \in \tilde{J}} A_j$. Como $S \cap A_\infty = \emptyset$ (por construção), então $S \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j$, onde $J := \tilde{J} \setminus \{\infty\}$ é um subconjunto finito de I . Isso mostra que a cobertura aberta $\{A_i\}_{i \in I}$ admite uma subcobertura finita $\{A_j\}_{j \in J}$ e, conseqüentemente, que S é compacto.

(b) Suponha que X seja Hausdorff e que S seja compacto. Se $S = X$ ou $S = \emptyset$, então S é fechado. Caso contrário, se $S \neq \emptyset$ e $X \setminus S \neq \emptyset$, podemos fixar um elemento $x \in X \setminus S$. Vamos construir uma vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \cap S = \emptyset$. Isso implicará que $X \setminus S$ é aberto, ou equivalentemente, que S é fechado.

Para construir essa vizinhança $U \in \mathcal{U}_x$, comece lembrando que $x \notin S$. Assim, como X é Hausdorff, para cada $s \in S$, existem vizinhanças $U_s \in \mathcal{U}_x$ e $V_s \in \mathcal{U}_s$ tais que $U_s \cap V_s = \emptyset$. Como $s \in V_s^\circ$ para todo $s \in S$, então $\bigcup_{s \in S} V_s^\circ$ é uma cobertura aberta de S . Como S é compacto por hipótese, então existe um subconjunto finito $J \subseteq S$ tal que $S \subseteq \bigcup_{s \in J} V_s^\circ$. Defina $U := \bigcap_{s \in J} U_s$. Como J é um conjunto finito, segue do Lema 4.7(a) que U é uma vizinhança de x . Além disso, pela construção, $U \cap S = \emptyset$. De fato, se $u \in U$, então $u \in U_s$ para todo $s \in J$. Como U_s e V_s são disjuntos, então $u \notin V_s$ para todo $s \in J$; ou seja, $u \notin \bigcup_{s \in J} V_s$. Como $S \subseteq \bigcup_{s \in J} V_s^\circ \subseteq \bigcup_{s \in J} V_s$, então $u \notin S$. Isso mostra que U é uma vizinhança de x que não intersecta S . $\square$

A proposição acima estabelece condições suficientes para que a compacidade seja herdada por subespaços, mas é importante observar que nenhuma das suas duas implicações é uma equivalência em geral. O exemplo seguinte ilustra que, sem a hipótese de Hausdorff, um subespaço compacto de um espaço compacto pode não ser fechado e que intervalos abertos da reta usual não são compactos.

Exemplo 21.6. Considere a reta real munida da sua topologia usual e o intervalo aberto $(0, 1)$ munido da topologia induzida. Vamos mostrar que a família $\{(1/n, 1)\}_{n \geq 2}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1)$ que não admite subcobertura finita. De fato, para ver que $\{(1/n, 1)\}_{n \geq 2}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1)$, observe que, para todo $x \in (0, 1)$, existe $n \geq 2$ tal que $1/n < x < 1$. Agora, para ver que essa cobertura aberta não admite subcobertura finita, observe que, se J for um subconjunto finito de $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 2\}$, então $n := \max J$ satisfaz $1/n < 1/j$ para todo $j \in J$. Logo, $\bigcup_{j \in J} (1/j, 1) = (1/n, 1) \neq (0, 1)$. Isso mostra que a família $\{(1/n, 1)\}_{n \geq 2}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1)$ que não admite subcobertura finita. Portanto, a condição de ser fechado no item (a) acima é realmente essencial.

Para mostrar que a hipótese de ser Hausdorff no item (b) também é indispensável, considere a reta real munida da sua topologia cofinita. Pelo argumento usado no Exemplo 21.4, todo subespaço da reta é compacto. Em particular, todo subconjunto aberto próprio da reta real é um subespaço compacto de um espaço compacto que não é fechado.

Combinando os dois itens da Proposição 21.5 com a compacidade dos intervalos $[a, b]$ estabelecida no Exemplo 21.3, obtemos uma caracterização completa dos subconjuntos compactos da reta conhecida como Teorema de Heine-Borel.

Corolário 21.7. Considere a reta real munida da sua topologia usual. Um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, K é limitado e fechado.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que $K \subseteq \mathbb{R}$ seja compacto. Lembre do Exemplo 17.3 que $\mathbb{R}$ é Hausdorff. Assim, pela Proposição 21.5(b), K é fechado. Agora, vamos mostrar que K é limitado. Se $K = \emptyset$, então K é limitado por vacuidade. Caso contrário, se $K \neq \emptyset$, podemos fixar um elemento $k \in K$. Além disso, podemos considerar a família de abertos $\{(k - n, k + n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Observe que essa família forma uma cobertura aberta de K . Como K é compacto, então existe um subconjunto finito $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{j \in J} (k - j, k + j)$. Como J é finito, então $\tilde{j} := \max J \in J$ e, conseqüentemente, $K \subseteq \bigcup_{j \in J} (k - j, k + j) = (k - \tilde{j}, k + \tilde{j})$. Isso implica que K é limitado.

Para mostrar a parte *se*, suponha que K seja limitado e fechado. Isso significa que existe $c > 0$ tal que $K \subseteq [-c, c]$. Como $[-c, c]$ é compacto (ver Exemplo 21.3), K é fechado (por hipótese) e $\mathbb{R}$ é Hausdorff (ver Exemplo 17.3), segue da Proposição 21.5(a) que K é compacto. $\square$

O corolário acima é específico para a reta real. Em espaços métricos mais gerais, a compacidade de um conjunto ainda implica que ele é limitado e fechado. Mas a recíproca pode falhar, como ilustrado no exercício a seguir.

Exercício 21.5. (a) Mostre que, se (X, d) for um espaço métrico e K for um subconjunto compacto de X , então K é limitado e fechado.

(b) Construa um exemplo de um espaço métrico (X, d) e de um subconjunto S de X tal que S é limitado e fechado, mas não é compacto.

Resolução (Daniel). (a) Suponha que (X, d) é um espaço métrico e que K seja um subconjunto compacto de X . Observe que $X = \bigcup_{n>0} B(0, n)$. Como $K \subseteq X$, então $K \subseteq \bigcup_{n>0} B(0, n)$, ou seja, $\{B(0, n)\}_{n>0}$ é uma cobertura aberta de K . Como K é compacto por hipótese, então essa cobertura admite uma subcobertura finita, ou seja, existe um subconjunto finito $J \subseteq \{n \mid n > 0\}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{j \in J} B(0, j)$. Assim, tomando $\tilde{j} := \max J$, obtemos que $K \subseteq B(0, \tilde{j})$. Isso mostra que K é um subconjunto limitado de X .

O fato de que K é fechado segue direto da Proposição 21.5(b) e do fato de que todo espaço métrico é Hausdorff (ver Exemplo 17.3).

(b) Considere o conjunto $X = \mathbb{N}$ e a métrica discreta

$$d(n, m) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = m, \\ 1, & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

Observe que X é um subconjunto fechado de X e que ele também é limitado, $X \subseteq B(0, 2)$. No entanto, ele não é compacto. De fato, lembre do Exercício 1.4

que a topologia induzida pela métrica discreta é a topologia discreta em X . Assim, a família $\{\{n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de X que não admite nenhuma subcobertura finita. $\square$

Até agora, estudamos a compacidade como uma propriedade intrínseca de espaços topológicos e de seus subespaços. Na parte final desta aula, investigaremos como a compacidade interage com funções contínuas. O próximo resultado afirma que a imagem contínua de um espaço compacto é compacta, o que nos permite deduzir propriedades importantes sobre funções contínuas definidas em espaços compactos, incluindo que tais funções são fechadas quando o contradomínio é Hausdorff, e que bijeções contínuas entre tais espaços são automaticamente homeomorfismos.

Proposição 21.8. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua.

- (a) Se f for sobrejetora e X for compacto, então Y é compacto.
- (b) Se X for compacto e Y for Hausdorff, então f é fechada.
- (c) Se X for compacto, Y for Hausdorff e f for sobrejetora, então f é uma aplicação quociente.
- (d) Se X for compacto, Y for Hausdorff e f for bijetora, então f é um homeomorfismo.

Demonstração. (a) Seja $\{B_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de Y , ou seja, uma família de abertos de Y tal que $Y = \bigcup_{i \in I} B_i$. Como f é contínua e B_i é aberto, então $f^{-1}(B_i)$ é aberto em X para todo $i \in I$. Além disso, como $Y = \bigcup_{i \in I} B_i$, então

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

Ou seja, $\{f^{-1}(B_i)\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto por hipótese, então existe um subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que $X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$. Daí e da hipótese de que f é sobrejetora, segue que

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)\right) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(B_j)) = \bigcup_{j \in J} B_j.$$

Isso mostra que a cobertura aberta $\{B_i\}_{i \in I}$ de Y admite uma subcobertura finita, $\{B_j\}_{j \in J}$. Portanto, Y é compacto.

- (b) Suponha que X seja compacto, que Y seja Hausdorff e que f seja contínua. Para mostrar que f é fechada, fixe um subconjunto fechado Z de X . Como X é compacto e Z é fechado, então Z é compacto também (pela Proposição 21.5(a)). Como f é contínua e Z é compacto, então $f(Z)$ é compacto (pelo item (a)). Como $f(Z)$ é compacto e Y é Hausdorff, então $f(Z)$ é fechado (pela Proposição 21.5(b)). Isso mostra que f é fechada.
- (c) Como f é contínua e sobrejetora, para mostrar que f é uma aplicação quociente, basta provar que, se $f^{-1}(B)$ é aberto em X , então B é aberto em Y (ver

Exercício 10.1(b)). Assim, suponha que B seja um subconjunto de Y tal que $f^{-1}(B)$ é aberto em X . Isso significa que $X \setminus f^{-1}(B)$ é fechado em X . Como f é fechada (pelo item (b)) e sobrejetora (por hipótese), então

$$f(X \setminus f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(Y \setminus B)) = Y \setminus B$$

é fechado em Y . Isso implica que B é aberto em Y e, conseqüentemente, que f é uma aplicação quociente.

- (d) Como f é contínua e bijetora (por hipótese), para mostrar que ela é um homeomorfismo, basta mostrar que ela é aberta ou fechada (ver Proposição 6.13). Como X é compacto e Y é Hausdorff (por hipótese), segue do item (b) que f é fechada. Isso implica que f é um homeomorfismo. $\square$

Uma consequência imediata e importante da proposição acima é a generalização do Teorema de Bolzano-Weierstrass para espaços topológicos compactos. Enquanto o teorema clássico afirma que funções contínuas definidas em intervalos fechados e limitados da reta real atingem seus valores máximo e mínimo, o corolário a seguir estende esse resultado para funções contínuas com domínio em qualquer espaço topológico compacto.

Corolário 21.9. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, munido da sua topologia usual. Sejam X um espaço topológico e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se X for compacto, então existem pontos $x_-, x_+ \in X$ tais que $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Como f é contínua e X é compacto, então $\text{im}(f)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (pela Proposição 21.8(a)). Como $\text{im}(f)$ é compacto em $\mathbb{R}$, então $\text{im}(f)$ é limitado e fechado (pelo Corolário 21.7). Conseqüentemente,

$$M := \sup \text{im}(f) \in \text{im}(f) \quad \text{e} \quad m := \inf \text{im}(f) \in \text{im}(f).$$

Isso implica que existem $x_-, x_+ \in X$ tais que $f(x_-) = m$ e $f(x_+) = M$. O resultado segue do fato de que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in X$ por construção. $\square$

Os resultados desta subseção mostram que funções contínuas preservam a compactidade de maneira bastante robusta. O exercício a seguir explora em que medida as propriedades de separação do domínio são transmitidas ao contradomínio por funções fechadas.

Exercício 21.6 (Israel). Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função fechada, contínua, sobrejetora e tal que $f^{-1}(y)$ é compacto em X para todo $y \in Y$.

- (a) Mostre que, se X for Hausdorff, então Y é Hausdorff.
 (b) Mostre que, se X for regular, então Y é regular.

AULA 22

Nesta aula, continuaremos o estudo dos espaços compactos, aprofundando as conexões entre compacidade e as propriedades de separação. Começaremos mostrando que espaços compactos e Hausdorff satisfazem o axioma de separação T_4 , o que evidencia a rigidez estrutural imposta pela compacidade. Em seguida, introduziremos a propriedade da interseção finita, uma ferramenta combinatória que reformula a compacidade em termos de famílias de conjuntos fechados. Essa reformulação nos permite enunciar e demonstrar o célebre Teorema de Tychonoff, que caracteriza a compacidade em produtos arbitrários, e permite mostrar que espaços de Tychonoff são homeomorfos a subespaços topológicos de espaços compactos Hausdorff.

Vamos começar mostrando que compacidade e a condição T_2 juntas implicam a condição de separação T_4 .

Proposição 22.1. Se X for um espaço topológico compacto e de Hausdorff, então X é um espaço topológico T_4 .

Demonstração. Suponha que X seja um espaço topológico de Hausdorff compacto. Lembre que um espaço topológico é T_4 se for T_1 e normal, isto é, se for T_1 e quaisquer dois fechados disjuntos puderem ser separados por abertos disjuntos. Como X é Hausdorff, em particular X é T_1 . Assim, para mostrar que X é T_4 , basta mostrar que X é normal.

Para mostrar que X é T_4 , fixe dois fechados disjuntos Z_1 e Z_2 de X . Vamos construir abertos disjuntos separando eles. Para começar, fixe $z_1 \in Z_1$. Para cada $x \in Z_2$, como X é Hausdorff e $z_1 \neq x$, existem vizinhanças disjuntas $U_{z_1,x} \in \mathcal{U}_{z_1}$ e $V_{z_1,x} \in \mathcal{U}_x$. Observe que a família $\{V_{z_1,x}^\circ\}_{x \in Z_2}$ é uma cobertura aberta de Z_2 . Como X é compacto e Z_2 é fechado em X , então Z_2 é compacto (pela Proposição 21.5(a)). Assim, existe um subconjunto finito $J_2 \subseteq Z_2$ tal que $\{V_{z_1,x}^\circ\}_{x \in J_2}$ é uma cobertura aberta de Z_2 . Defina

$$U_{z_1} := \bigcap_{x \in J_2} U_{z_1,x} \quad \text{e} \quad B_{z_1} := \bigcup_{x \in J_2} V_{z_1,x}^\circ.$$

Agora, observe que, como J_2 é um conjunto finito, então U_{z_1} é uma vizinhança de z_1 , para todo $z_1 \in Z_1$ (ver Lema 4.7(a)). Logo, a família $\{U_x^\circ\}_{x \in Z_1}$ é uma cobertura aberta de Z_1 . Como X é compacto e Z_1 é fechado em X , então Z_1 é compacto (pela Proposição 21.5(a)). Assim, existe um subconjunto finito $J_1 \subseteq Z_1$ tal que $\{U_x^\circ\}_{x \in J_1}$ é uma cobertura aberta de Z_1 . Defina

$$A := \bigcup_{x \in J_1} U_x^\circ \quad \text{e} \quad B := \bigcap_{x \in J_1} B_x.$$

Por construção, A é um aberto de X contendo Z_1 e B é um aberto de X contendo Z_2 . Vamos mostrar que $A \cap B = \emptyset$. Se existisse $x \in A \cap B$, então $x \in A$ e $x \in B$. Como $A = \bigcup_{z_1 \in J_1} U_{z_1}^\circ$ e $B = \bigcap_{z_1 \in J_1} B_{z_1}$, isso implicaria que existiria $z_1 \in J_1$ tal que $x \in U_{z_1}$ e $x \in B_{z_1}$. Como $U_{z_1} = \bigcap_{z_2 \in J_2} U_{z_1,z_2}$ e $B_{z_1} = \bigcup_{z_2 \in J_2} V_{z_1,z_2}^\circ$, isso implicaria que existiria $z_2 \in J_2$ tal que $x \in U_{z_1,z_2}$ e $x \in V_{z_1,z_2}^\circ$. Como essas vizinhanças são

disjuntas por construção, tal x não pode existir. Isso mostra que A e B são abertos disjuntos que contêm Z_1 e Z_2 respectivamente. Isso significa que X é normal e, sendo também T_1 , é T_4 . $\square$

A proposição acima mostra que espaços de Hausdorff compactos são T_4 . Uma pergunta natural é se a recíproca também é verdadeira, ou seja, se todo espaço T_4 é de Hausdorff compacto. Para mostrar esse resultado, nós vamos mostrar primeiro que produtos de espaços compactos são compactos. (Esse resultado é conhecido como Teorema de Tychonoff.) Uma ferramenta útil para demonstrar o Teorema de Tychonoff é a chamada *propriedade da interseção finita*, que captura a ideia de que toda subfamília finita de uma família possui interseção não vazia.

Definição 22.2 (de propriedade da interseção finita). Dado um conjunto X , uma família de subconjuntos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfaz a **propriedade da interseção finita** quando, para toda subfamília finita $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} \subseteq \mathcal{F}$, temos que $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n \neq \emptyset$.

Antes de explorar a relação entre a propriedade da interseção finita e a compacidade, vamos apresentar exemplos de famílias que satisfazem essa propriedade, os filtros, e de famílias que não satisfazem essa propriedade, as topologias. O fato dos filtros satisfazerem a propriedade de interseção finita não é coincidência: como veremos, há uma profunda conexão entre filtros e essa propriedade.

Exemplo 22.3. Dado um espaço topológico X , todo filtro $\mathcal{F}$ em X satisfaz a propriedade da interseção finita. De fato, lembre da Observação 14.4 que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Além disso lembre da Definição 14.1 que, para quaisquer $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$, temos que $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F}$. Daí e da indução em n , segue que $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n \in \mathcal{F}$, e portanto $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n \neq \emptyset$, para todos $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in \mathcal{F}$.

Enquanto os filtros satisfazem a propriedade da interseção finita, as topologias fornecem o exemplo oposto: a presença do conjunto vazio, obrigatória em toda topologia, impede imediatamente que essa propriedade se verifique. Esse contraste é instrutivo e mostra que a propriedade da interseção finita distingue com precisão as famílias que excluem o vazio das que não o fazem.

Exemplo 22.4. Dado um conjunto X , toda topologia τ em X não satisfaz a propriedade da interseção finita. De fato, como $\emptyset \in \tau$, então podemos tomar a subfamília finita $\{\emptyset\} \subseteq \tau$. Mais geralmente, toda família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que contém $\emptyset$ não satisfaz a propriedade da interseção finita.

Uma pergunta natural é se toda família satisfazendo a propriedade da interseção finita pode ser estendida a uma família maximal com a mesma propriedade. O exercício a seguir responde essa pergunta e mostra que tal extensão maximal é, na verdade, um filtro.

Exercício 22.1 (Mateus). Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X que satisfaz a propriedade da interseção finita.

- (a) Mostre que existe $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$; $\mathcal{M}$ satisfaz a propriedade da interseção finita; e se $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ é tal que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ e satisfaz a propriedade

da interseção finita, então $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. (Ou seja, $\mathcal{M}$ é maximal dentre todas as famílias de subconjuntos de X que contêm $\mathcal{F}$ e satisfazem a propriedade da interseção finita.)

- (b) Mostre que $\mathcal{M}$ é um filtro em X .
- (c) Mostre que $p \in \bigcap_{Y \in \mathcal{M}} \overline{Y}$ se, e somente se, $\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{M}$.
- (d) Se X for T_1 , mostre que $\bigcap_{Y \in \mathcal{M}} \overline{Y}$ tem no máximo 1 ponto.

Com a propriedade da interseção finita em mãos, estamos prontos para reformular a compacidade de maneira que será essencial para a demonstração do Teorema de Tychonoff. O lema a seguir estabelece diversas caracterizações equivalentes da compacidade: via famílias de fechados com a propriedade da interseção finita e via filtros. Cada uma dessas perspectivas tem vantagens técnicas distintas.

Lema 22.5. Seja (X, τ) um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) X é compacto.
- (b) Para toda família de fechados $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfaz a propriedade da interseção finita, temos que $\bigcap_{Z \in \mathcal{F}} Z \neq \emptyset$.
- (c) Para todo filtro F em X , existe um filtro convergente G tal que $F \subseteq G$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Suponha que X seja um espaço topológico compacto. Seja $\mathcal{F}$ uma família de fechados em X que satisfaz a propriedade da interseção finita. Considere a família de abertos $\mathcal{A} := \{X \setminus Z\}_{Z \in \mathcal{F}}$. Como $\mathcal{F}$ satisfaz a propriedade da interseção finita, então $Z_1 \cap Z_2 \cap \cdots \cap Z_n \neq \emptyset$ para toda subfamília finita $Z_1, Z_2, \dots, Z_n \in \mathcal{F}$. Equivalentemente, $(X \setminus Z_1) \cup (X \setminus Z_2) \cup \cdots \cup (X \setminus Z_n) \neq X$ para toda subfamília finita $(X \setminus Z_1), (X \setminus Z_2), \dots, (X \setminus Z_n) \in \mathcal{A}$; ou seja, nenhuma subfamília finita de $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, então $\mathcal{A}$ não pode ser uma cobertura aberta de X . (Caso contrário, essa cobertura aberta não admitiria nenhuma subcobertura finita.) Isso significa que $\bigcup_{Z \in \mathcal{F}} X \setminus Z \neq X$ ou, equivalentemente, que $\bigcap_{Z \in \mathcal{F}} Z \neq \emptyset$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Suponha que, para toda família de fechados $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfaz a propriedade da interseção finita, temos que $\bigcap_{Z \in \mathcal{F}} Z \neq \emptyset$. Seja F um filtro em X . Defina a família de fechados $\mathcal{F} := \{\overline{Y} \mid Y \in F\}$. Lembre do Exemplo 22.3 que F satisfaz a propriedade da interseção finita. Como $Y \subseteq \overline{Y}$ para todo $Y \in F$, isso implica que $\mathcal{F}$ também satisfaz a propriedade da interseção finita. Assim, segue da hipótese que $\bigcap_{Y \in F} \overline{Y} \neq \emptyset$. Escolha $x \in \bigcap_{Y \in F} \overline{Y}$. Como $x \in \bigcup_{Y \in F} \overline{Y}$, então $x \in \overline{Y}$ para todo $Y \in F$. Daí e da Proposição 5.16 segue que $Y \cap U \neq \emptyset$ para todo $Y \in F$ e $U \in \mathcal{U}_x$. Logo, $B := \{Y \cap U \mid Y \in F \text{ e } U \in \mathcal{U}_x\}$ é uma base de filtro em X . Observe que o filtro (B) converge para x e que $F \subseteq (B)$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Suponha que todo filtro em X esteja contido em um filtro convergente. Nós queremos mostrar que X é compacto, ou seja, nós queremos mostrar que, se $\{A_i\}_{i \in I}$ for uma cobertura aberta de X , então existe um subconjunto finito $J \subseteq I$

tal que $\{A_j\}_{j \in J}$ também é uma cobertura aberta de X . Vamos mostrar a sua contrapositiva: se $\{A_i\}_{i \in I}$ for uma família de abertos de X tal que $\bigcup_{j \in J} A_j \neq X$ para todo subconjunto finito $J \subseteq I$, então $\bigcup_{i \in I} A_i \neq X$ também. Como o caso em que I é um conjunto finito é trivial, vamos supor, em particular, que $I \neq \emptyset$.

Assim, para cada $i \in I$, podemos denotar $X \setminus A_i$ por Z_i . Observe que Z_i é um subconjunto fechado de X e que

$$\bigcap_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Usando essa notação, podemos reescrever a contrapositiva acima da seguinte forma: se $\{Z_i\}_{i \in I}$ for uma família de fechados de X tal que $\bigcap_{j \in J} Z_j \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $J \subseteq I$, então $\bigcap_{i \in I} Z_i \neq \emptyset$ também. Para mostrar essa afirmação, vamos usar a hipótese de que, para todo filtro F em X , exista um ponto $x \in X$ tal que $U \cap Y \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$ e todo $Y \in F$.

Para começar, considere a família

$$\mathcal{B} := \{\bigcap_{j \in J} Z_j \mid J \text{ é um subconjunto finito de } I\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X . De fato, observe que $\mathcal{B}$ é não vazio, por causa da hipótese de que $I \neq \emptyset$. Além disso, $\bigcap_{j \in J} Z_j \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $J \subseteq I$ (também por hipótese); ou seja, $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Por fim, observe que $(\bigcap_{j \in J_1} Z_j) \cap (\bigcap_{j \in J_2} Z_j) = \bigcap_{j \in J_1 \cup J_2} Z_j$. Em particular, se J_1 e J_2 são subconjuntos finitos de I , então $J_1 \cup J_2$ também é um subconjunto finito de I . Isso implica que $\mathcal{B}$ é fechado por interseção. Pelo Lema 14.6, isso mostra que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X .

Como $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , pela hipótese, existe um filtro convergente F tal que $(\mathcal{B}) \subseteq F$. Denote por x um ponto de X para o qual F converge. Isso significa que $U \cap Y \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$ e $Y \in F$. Em particular, $U \cap Z_i \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_x$ e $i \in I$. Pela Proposição 5.16, isso significa que $x \in \overline{Z_i}$ para todo $i \in I$. Como os subconjuntos Z_i são fechados (por hipótese), isso implica que $x \in Z_i$ para todo $i \in I$ ou, equivalentemente, que $x \in \bigcap_{i \in I} Z_i$. Isso conclui a demonstração de que $\bigcap_{i \in I} Z_i$ é não vazia. $\square$

A caracterização do Lema 22.5 via filtros é precisamente a ferramenta que precisamos para demonstrar o Teorema de Tychonoff. Este teorema, que é um dos resultados centrais da topologia geral, afirma que o produto arbitrário de espaços compactos é compacto. Sua demonstração é uma aplicação elegante da teoria de filtros.

Teorema 22.6 (de Tychonoff). Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, e considere o conjunto $X := \prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto. O espaço topológico X é compacto se, e somente se, os espaços X_i são compactos para todos os $i \in I$.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que X seja um espaço compacto. Como X é compacto e as funções $\pi_i : X \rightarrow X_i$ são contínuas e sobrejetoras (ver Proposição 9.5(a)), segue da Proposição 21.8(a) que X_i é compacto para todo $i \in I$.

Para mostrar a parte *se*, suponha que os espaços X_i sejam compactos para todo $i \in I$. Queremos mostrar que X também é compacto. Pelo Lema 22.5, isso é equivalente a mostrar que, todo filtro F em X está contido em um filtro convergente. Assim, vamos fixar um filtro F em X . Pelo Exercício 14.2, $\pi_i(F)$ é uma base de filtro em X_i . Como X_i é compacto (por hipótese), existe um filtro F_i convergente tal que $\pi_i(F) \subseteq F_i$ (pelo Lema 22.5). Denote por x_i um ponto em X_i para o qual o filtro F_i converge e defina um ponto $\chi \in X$ por $\chi(i) = x_i$ para todo $i \in I$. Vamos mostrar que a família

$$\mathcal{B} := \left\{ Y \cap \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \mid Y \in F, i_1, \dots, i_n \in I \text{ e } U_{i_k} \in \mathcal{U}_{x_{i_k}, X_{i_k}} \right\}$$

é uma base de filtro em X que contém F e converge para χ . Para mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , comece observando que $\mathcal{B}$ é não vazio, já que F , I e $\mathcal{U}_{x_i, X_i}$ são não vazios. Depois, observe que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. De fato, se $Y \in F$ e $i \in I$, então $\pi_i(Y) \in F_i$. Como F_i converge para x_i , então $\mathcal{U}_{x_i, X_i} \subseteq F_i$; e como F_i é um filtro, então $\pi_i(Y) \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $U_i \in \mathcal{U}_{x_i, X_i}$. Isso implica que $Y \cap \pi_i^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ para todo $Y \in F$, todo $i \in I$ e todo $U_i \in \mathcal{U}_{x_i, X_i}$. Daí segue que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Para completar a demonstração de que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X , observe que, se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Isso mostra que $\mathcal{B}$ é uma família não vazia de conjuntos não vazios fechada por interseção. Daí e do Lema 14.6 segue que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X .

Para mostrar que $\mathcal{B}$ contém F , observe que, como $X = \pi_i^{-1}(X_i)$ e $X_i \in \mathcal{U}_{x_i, X_i}$, então $X = X \cap X \in \mathcal{B}$ para todo $X \in F$. Para mostrar que $\mathcal{B}$ converge para χ , observe que, como $\mathcal{B}_\Pi$ é uma base da topologia produto (ver Definição 9.2), para todo $U \in \mathcal{U}_{\chi, X}$ existem $i_1, \dots, i_n \in I$ e vizinhanças abertas $A_{i_k} \in \mathcal{U}_{x_{i_k}, X_{i_k}}$ tais que

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(A_{i_n}) \subseteq U$$

e, como $X \in F$, então

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(A_{i_n}) = X \cap \pi_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(A_{i_n}) \in \mathcal{B}.$$

Isso mostra que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em X que é convergente e contém F . Pelo Lema 22.5, isso significa que X é um espaço topológico compacto. $\square$

O Teorema de Tychonoff tem uma consequência imediata: produtos arbitrários do intervalo $[0, 1]$ são compactos. Isso sugere que os espaços que se mergulham em tais produtos possuem uma estrutura particularmente rica. A proposição a seguir formaliza essa ideia, caracterizando os espaços de Tychonoff como exatamente aqueles que se mergulham em espaços compactos Hausdorff.

Proposição 22.7. Seja X um espaço topológico não vazio, e considere o intervalo fechado $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ munido da topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) X é um espaço de Tychonoff.
- (b) X é homeomorfo a um subespaço de $[0, 1]^{C_b(X)}$.
- (c) X é homeomorfo a um subespaço de um espaço topológico Hausdorff compacto.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Suponha que (X, τ) seja um espaço de Tychonoff. Lembre que isso implica que (X, τ) é completamente regular. Assim, τ é a topologia fraca induzida pela família $C_b(X)$ de funções contínuas e limitadas $X \rightarrow \mathbb{R}$ (pela Proposição 20.9). Vamos usar essas funções para construir um subespaço de $[0, 1]^{C_b(X)}$ que é homeomorfo a X .

Primeiro, vamos renormalizar as funções de $C_b(X)$. Para cada função constante $\phi \in C_b(X)$, defina $f_\phi : X \rightarrow [0, 1]$ como sendo $f_\phi(x) = 0$ para todo $x \in X$. Para as funções $\phi \in C_b(X)$ que não são constantes, nós temos que $\inf \text{im}(\phi) < \sup \text{im}(\phi)$. Assim, nesses casos, podemos definir uma função $f_\phi : X \rightarrow [0, 1]$ por

$$f_\phi(x) = \frac{\phi(x) - a_\phi}{b_\phi - a_\phi}, \quad \text{onde } a_\phi := \inf \text{im}(\phi) \text{ e } b_\phi := \sup \text{im}(\phi).$$

Observe que f_ϕ é, de fato, uma função contínua (ver Exercício 6.6) cuja imagem está contida no intervalo $[0, 1]$, para toda $\phi \in C_b(X)$. Usando essas renormalizações, vamos definir uma função $\Phi : X \rightarrow [0, 1]^{C_b(X)}$ da seguinte forma: $\Phi(x) \in [0, 1]^{C_b(X)}$ é a função $C_b(X) \rightarrow [0, 1]$ definida por $\Phi(x)(\phi) = f_\phi(x)$ para cada $x \in X$ e $\phi \in C_b(X)$. Pelo Exercício 22.2, Φ é um homeomorfismo entre X e $\text{im}(\Phi)$, que é um subespaço topológico de $[0, 1]^{C_b(X)}$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Suponha que X seja homeomorfo a um subespaço topológico de $[0, 1]^{C_b(X)}$. Para mostrar que X é homeomorfo a um subespaço topológico de um espaço Hausdorff compacto, vamos mostrar que $[0, 1]^{C_b(X)}$ é um espaço topológico Hausdorff compacto.

Pelo Exemplo 17.3 e pelo Exercício 17.4, $[0, 1]$ é um espaço topológico Hausdorff. Daí e do Exercício 17.5, segue que $[0, 1]^{C_b(X)}$ também é um espaço topológico Hausdorff. Além disso, pelo Exemplo 21.3, $[0, 1]$ é um espaço topológico compacto. Daí e do Teorema de Tychonoff (Teorema 22.6), segue que $[0, 1]^{C_b(X)}$ também é um espaço topológico compacto.

(c) $\Rightarrow$ (a): Suponha que X seja homeomorfo a um subespaço topológico S de um espaço topológico Y que é de Hausdorff compacto. Como Y é um espaço de Hausdorff compacto, então ele é T_4 (ver Proposição 22.1). Como todo espaço topológico T_4 é um espaço de Tychonoff, então Y é um espaço de Tychonoff (ver Observação 20.2). Como S é um subespaço topológico de um espaço de Tychonoff, então S também é de Tychonoff (ver Corolário 20.8(a)). Como X é homeomorfo a um espaço de Tychonoff, então X também é de Tychonoff (ver Exercício 20.4). $\square$

A proposição acima é, de certa forma, a recíproca da Proposição 22.1. O exercício a seguir é utilizado na demonstração da implicação (a) $\Rightarrow$ (b) acima.

Exercício 22.2 (Roger). Considere um conjunto não vazio X , uma família de espaços topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ e uma família de funções $\{\varphi_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$. Lembre

$\mathcal{S} := \bigcup_{i \in I} \{\varphi_i^{-1}(A) \mid A \in \tau_i\}$ é uma subbase da topologia fraca induzida por $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ em X . Muna X desta topologia e considere a função

$$\Phi : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \quad \text{dada por} \quad \Phi(x)(i) = \varphi_i(x) \quad \text{para todos } x \in X, i \in I.$$

- (a) Se, para quaisquer $x \neq y \in X$, existir $i \in I$ tal que $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y)$, mostre que Φ é injetora.
- (b) Mostre que Φ é contínua.
- (c) Mostre que Φ é aberta.
- (d) Conclua que Φ induz um homeomorfismo entre X e $\text{im}(\Phi)$.

AULA 23

Nesta aula, introduziremos o conceito de conexidade. Intuitivamente, um espaço é conexo quando não pode ser separado em dois pedaços abertos disjuntos. Começaremos definindo precisamente essa noção e explorando exemplos concretos. Em seguida, investigaremos como a conexidade se comporta em subespaços e sob uniões de espaços conexos, culminando em uma caracterização muito útil de conexidade.

23.1. Espaços conexos. Nesta parte inicial, definiremos formalmente o conceito de conexidade e estabeleceremos seus primeiros exemplos e suas primeiras propriedades. Começaremos pela sua definição, que captura a ideia de que um espaço conexo é aquele que não pode ser decomposto em duas partes abertas, disjuntas e não vazias. Em seguida, ilustraremos a definição com exemplos progressivamente mais complexos e mostraremos um critério para verificar a conexidade de um espaço em termos de conjuntos simultaneamente abertos e fechados.

Definição 23.1 (de espaço conexo). Um espaço topológico X é dito **desconexo** quando existem abertos próprios e disjuntos, $A_1, A_2 \subseteq X$, tais que $X = A_1 \cup A_2$. Um espaço topológico X é dito **conexo** quando X não é desconexo, ou seja, quando, para quaisquer dois abertos A_1 e A_2 de X , temos que: ou $A_1 \cup A_2 \neq X$, ou $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, ou $A_1 = \emptyset$, ou $A_2 = \emptyset$.

Para fixar as ideias, examinaremos a seguir os exemplos mais simples possíveis: espaços com um único ponto e com dois pontos. Esses casos básicos revelam como a estrutura da topologia influencia diretamente na conexidade do espaço.

Exemplo 23.2. Todo ponto é conexo. De fato, considere um conjunto com um único elemento, $X = \{\bullet\}$, munido da sua única topologia, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Como os únicos abertos de X são $\emptyset$ e X , nenhum deles é próprio. Assim, nesse caso, não existem abertos próprios e disjuntos, $A_1, A_2 \subseteq X$, tais que $X = A_1 \cup A_2$. Logo, X é conexo.

O exemplo anterior mostra que um espaço com um único ponto é sempre conexo. O exemplo a seguir mostra que, quando o espaço contém mais de um ponto, a sua conexidade depende da topologia escolhida.

Exemplo 23.3. Considere um conjunto com dois elementos distintos, $X = \{a, b\}$. Lembre que, a menos de homeomorfismos, as únicas topologias em X são: a trivial, a de Sierpinski, e a discreta. Vamos determinar quais delas fazem com que X seja um espaço conexo:

- Topologia trivial. Como X não contém nenhum aberto próprio nesse caso, então esse espaço é conexo.
- Topologia de Sierpinski. Considere a topologia de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Nesse caso, o espaço topológico (X, τ) também é conexo, porque o único aberto próprio de X é $\{a\}$. Ou seja, não existem dois abertos próprios e disjuntos que cobrem X .

- Topologia discreta. Lembre que a topologia discreta de X é $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$. Assim, se tomarmos os abertos $A_1 = \{a\}$ e $A_2 = \{b\}$, teremos que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = X$. Isso mostra que, nesse caso, (X, τ) é um espaço topológico desconexo.

Os exemplos anteriores sugerem que topologias com poucos abertos tendem a produzir espaços conexos, ao passo que topologias mais finas tendem a produzir espaços desconexos. O exercício a seguir pede que se demonstre essa intuição de forma geral.

Exercício 23.1. Seja X um conjunto com mais de 1 elemento.

- Mostre que X munido da topologia trivial é conexo.
- Mostre que X munido da topologia discreta é desconexo.
- Sejam τ, τ' duas topologias em X . Mostre que, se $\tau \subseteq \tau'$ e (X, τ') é conexo, então (X, τ) também é conexo.

Resolução (Zyon). (a) Em relação à topologia trivial, existem apenas dois abertos, X e $\emptyset$. Portanto, não existem abertos próprios em X e, conseqüentemente, (X, τ) não pode ser desconexo. Ou seja, todo conjunto X munido da sua topologia trivial é conexo.

(b) Em relação à topologia discreta, todo subconjunto de X é aberto. Em particular, para todo $x \in X$, o conjunto $A_1 := \{x\}$ é aberto e o conjunto $A_2 := X \setminus A_1$ também é aberto. Como X possui mais de um elemento, A_1 e A_2 são subconjuntos próprios de X . Além disso, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = X$ por construção. Logo, todo conjunto X com mais de um ponto, quando munido da topologia discreta, é desconexo.

(c) Vamos mostrar a contrapositiva: se (X, τ) é desconexo e $\tau \subseteq \tau'$, então (X, τ') também é desconexo. De fato, se (X, τ) for desconexo, então existem dois abertos próprios $A_1, A_2 \in \tau$ tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1 \cup A_2 = X$. Como τ' é mais fina que τ , então $A_1, A_2 \in \tau'$ também. Sendo assim, (X, τ') também é desconexo. $\square$

A definição de conexidade em termos de coberturas por abertos próprios e disjuntos é conceitualmente clara, mas nem sempre é a mais prática. O lema a seguir fornece um critério equivalente, formulado em termos de subconjuntos simultaneamente abertos e fechados, que frequentemente simplifica as demonstrações.

Lema 23.4. Um espaço topológico X é conexo se, e somente se, seus únicos subconjuntos abertos e fechados (ao mesmo tempo) são $\emptyset$ e X .

Demonstração. Na verdade, vamos mostrar a contrapositiva dessa afirmação. Vamos mostrar que: um espaço topológico X é desconexo se, e somente se, existe um subconjunto próprio de X que é aberto e fechado (ao mesmo tempo).

Para mostrar a parte *somente se*, suponha que X seja desconexo. Por definição, isso significa que existem subconjuntos abertos próprios e disjuntos, $A_1, A_2 \subseteq X$, tais

que $A_1 \cup A_2 = X$. Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, então $A_2 \subseteq (X \setminus A_1)$; e como $A_1 \cup A_2 = X$, então $A_2 = (X \setminus A_1)$. Como A_1 é aberto por hipótese, isso implica que A_2 é fechado. Como A_2 também é aberto e próprio por hipótese, concluímos que A_2 é um subconjunto próprio de X que é aberto e fechado.

Para mostrar a parte *se*, suponha que exista um subconjunto próprio A de X que é aberto e fechado. Defina $B := (X \setminus A)$. Como A é próprio, então B também é próprio; e como A é fechado, então B é aberto. Isso mostra que A e B são subconjuntos abertos próprios e disjuntos de X tais que $A \cup B = A \cup (X \setminus A) = X$. Isso significa que X é desconexo. $\square$

Vamos aplicar o critério acima para verificar a conexidade do primeiro exemplo não trivial: a reta real munida da sua topologia usual. Esse resultado é fundamental, pois serve de base para demonstrar a conexidade de outros espaços também.

Exemplo 23.5. Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido da sua topologia usual. Vamos mostrar que $\mathbb{R}$ é conexo. Para isso, seja Y um subconjunto aberto e fechado de $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que $Y = \emptyset$ ou $Y = \mathbb{R}$. Pelo Lema 23.4, isso implicará que $\mathbb{R}$ é conexo.

Suponha que Y é um subconjunto aberto e fechado de $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que, se $Y \neq \emptyset$, então $Y = \mathbb{R}$. De fato, se $Y \neq \emptyset$, então existe um elemento $y \in Y$. Assim, podemos considerar o conjunto $C := \{y' \in Y \mid y' \geq y \text{ e } [y, y'] \subseteq Y\}$. Vamos mostrar que $\sup C = \infty$. Para isso, vamos usar contradição. Suponha que $\sup C$ fosse finito e denote-o por s . Como $s \in Y$ por construção e Y é aberto por hipótese, então existiria $\epsilon > 0$ tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq Y$. Como Y também é fechado por hipótese, seguiria daí que $[s - \epsilon, s + \epsilon] \subseteq Y$. Logo,

$$[y, s + \epsilon] = [y, s] \cup [s - \epsilon, s + \epsilon] \subseteq Y.$$

Isso significaria que $s + \epsilon \in C$ também. Como $\epsilon > 0$, então $s < s + \epsilon$. Ou seja, C conteria um elemento maior que seu supremo, o que não faz sentido. Isso mostra que $\sup C = \infty$, ou seja, que $[y, \infty) \subseteq Y$. Analogamente, podemos mostrar que $(-\infty, y] \subseteq Y$, o que implica que $Y = \mathbb{R}$.

Os exercícios a seguir aprofundam os exemplos e resultados acima. O primeiro estabelece uma caracterização completa dos subespaços conexos de $\mathbb{R}$ e o segundo estabelece quais topologias na reta a tornam conexa.

Exercício 23.2. Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, munido da sua topologia usual. Mostre que os únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos (abertos, semi-abertos e fechados).

Resolução (Angie). Vamos mostrar a contrapositiva: se X for um subconjunto de $\mathbb{R}$ não é um intervalo, então X é desconexo. Suponha que existam $a < y < b$ tais que $a, b \in X$ e $y \notin X$. Defina $A := (-\infty, y) \cap X$ e $B := (y, \infty) \cap X$. Como $(-\infty, y)$ e (y, ∞) são abertos em $\mathbb{R}$, os conjuntos A e B são abertos em X . Além disso, como $(-\infty, y) \cap (y, \infty) = \emptyset$, então $A \cap B = \emptyset$ também. Por fim, note que, como $y \notin X$

por hipótese, então $A \cup B = X$. Assim, A e B são dois subconjuntos não vazios, disjuntos e abertos em X tais que $X = A \cup B$. Isso mostra que X é desconexo. $\square$

Exercício 23.3. Considere o conjunto $\mathbb{R}$ munido das seguintes topologias: discreta, topologia K (Exercício 3.2), de Sorgenfrey (Exemplo 3.5), topologia usual (métrica), cofinita (Exemplo 2.3), coenumerável (Exemplo 13.6), topologia do Exercício 3.1, e topologia trivial. Determine com quais dessas topologias $\mathbb{R}$ é conexo ou desconexo.

Resolução (Celso). Vamos analisar essas topologias na reta real começando pela mais fina delas.

- Topologia discreta. Pelo Exercício 23.1(b), a reta real é desconexa quando munida da sua topologia discreta, porque a reta tem mais de um ponto.
- Topologia de Sorgenfrey. Pela definição da topologia de Sorgenfrey (ver Exemplo 3.5), os conjuntos $A = [0, 1)$ e $B = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ são abertos próprios e disjuntos de $\mathbb{R}$. Assim, A e B são abertos e fechados próprios de $\mathbb{R}$. Pelo Lema 23.4 isso significa que a reta é desconexa quando munida da topologia de Sorgenfrey.
- Topologia K . Sejam A e B dois abertos próprios de $\mathbb{R}$ tais que $A \cup B = \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $A \cap B \neq \emptyset$. Para começar, observe que, como $0 \in \mathbb{R} = A \cup B$, então $0 \in A$ ou $0 \in B$. Se $0 \in A \cap B$, já obtemos que $A \cap B \neq \emptyset$. Caso contrário, podemos supor, sem perder generalidade, que $0 \in A$. Como $0 \in A$ e A é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que o aberto básico $(-\epsilon, \epsilon) \setminus K$ está contido em A . Denote por C o conjunto $\{\epsilon > 0 \mid (-\epsilon, \epsilon) \setminus K \subseteq A\}$. Assim como no Exemplo 23.5, podemos mostrar que: ou $A \cap B \neq \emptyset$, ou $\sup C = \infty$. Isso implica que: ou $A \cap B \neq \emptyset$, ou $\mathbb{R} \setminus K \subseteq A$. Observe também que $1/n \in \mathbb{R} = A \cup B$ e, consequentemente, que $1/n \in A$ ou $1/n \in B$, para cada $n > 0$. Se $1/n \in A$ para todo $n > 0$, então teríamos que $\mathbb{R} \subseteq A$, ou seja, que A não seria um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$. Então deve existir $n > 0$ tal que $1/n \in B$. Como B é aberto em $\mathbb{R}$ por hipótese, então existe $\epsilon > 0$ tal que o aberto básico $(1/n - \epsilon, 1/n + \epsilon)$ está contido em B . Como

$$\emptyset \neq (\mathbb{R} \setminus K) \cap (1/n - \epsilon, 1/n + \epsilon) \subseteq A \cap B,$$

isso implica que $A \cap B \neq \emptyset$. Isso mostra que, em todos os casos, $A \cap B \neq \emptyset$. Daí, concluímos que a reta real é conexa quando munida com a topologia K .

Como a topologia usual, a topologia cofinita, a topologia coenumerável, a topologia do Exercício 3.1 e a topologia trivial são mais grossas que a topologia K (ver Figura 3.1), segue do Exercício 23.1(c), que a reta real também é conexa quando munida de alguma dessas topologias. $\square$

Nesta segunda parte da aula, investigaremos como a conexidade se comporta em relação a subespaços e uniões. Em geral, subespaços topológicos de espaços conexos não são necessariamente conexos. Por exemplo, dois pontos distintos ou dois intervalos disjuntos de $\mathbb{R}$ forma subespaços desconexos, apesar da reta ser um espaço

conexo. O próximo resultado estabelece uma condição para que um subespaço de um espaço topológico seja desconexo.

Lema 23.6. Sejam X um espaço topológico, S um subespaço topológico de X e Y_1, Y_2 dois subconjuntos de X tais que $S \subseteq Y_1 \cup Y_2$, $\overline{Y_1} \cap Y_2 = \emptyset$ e $Y_1 \cap \overline{Y_2} = \emptyset$. Se S for conexo, então $S \subseteq Y_1$ ou $S \subseteq Y_2$.

Demonstração. Denote $S \cap Y_1$ por S_1 e $S \cap Y_2$ por S_2 . Vamos começar mostrando que S_1 e S_2 são subconjuntos abertos de S tais que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ e $S_1 \cup S_2 = S$. De fato, como $S \subseteq Y_1 \cup Y_2$, então

$$S = S \cap (Y_1 \cup Y_2) = (S \cap Y_1) \cup (S \cap Y_2) = S_1 \cup S_2;$$

e, como $Y_1 \cap Y_2 \subseteq \overline{Y_1} \cap Y_2 = \emptyset$, então

$$S_1 \cap S_2 = (S \cap Y_1) \cap (S \cap Y_2) = S \cap Y_1 \cap Y_2 = \emptyset.$$

Agora, vamos mostrar que S_1 e S_2 são abertos em S . De fato, como $\overline{Y_1} \cap Y_2 = \emptyset$, então $Y_2 \subseteq (X \setminus \overline{Y_1})$. Isso implica que

$$S_2 = S \cap Y_2 \subseteq S \cap (X \setminus \overline{Y_1}) = S \setminus (S \cap \overline{Y_1}) \subseteq S \setminus (S \cap Y_1) = S \setminus S_1 = S_2.$$

Em particular, isso mostra que $S_2 = S \setminus (S \cap \overline{Y_1})$, que é aberto em S . Usando um argumento análogo, podemos mostrar que S_1 também é aberto em S . Isso garante que S_1 e S_2 são subconjuntos abertos de S tais que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ e $S_1 \cup S_2 = S$.

Como S é um espaço topológico conexo por hipótese, isso implica que $S_1 = \emptyset$ ou $S_2 = \emptyset$. No primeiro caso, teríamos que $S = S_2 = S \cap Y_2$, ou seja, que $S \subseteq Y_2$. No segundo caso, teríamos que $S = S_1 = S \cap Y_1$, ou seja, que $S \subseteq Y_1$. $\square$

O resultado anterior nos diz que subespaços conexos não podem ser separados por abertos mutuamente disjuntos. Usando esse resultado, podemos demonstrar que uniões de subespaços conexos com interseções não vazias são conexas.

Proposição 23.7. Seja X um espaço topológico. Se existir uma família de subespaços conexos $\{S_i\}_{i \in I}$ de X tais que $X = \bigcup_{i \in I} S_i$ e $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ para todos $i \neq j \in I$, então X é conexo.

Demonstração. Suponha que Y seja um subconjunto aberto e fechado de X . Vamos mostrar que $Y = \emptyset$ ou $Y = X$. Pelo Lema 23.4, isso implicará que X é conexo. Para mostrar que $Y = \emptyset$ ou $Y = X$, comece supondo que $Y \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $S_i \subseteq Y$ para todo $i \in I$. Como $X = \bigcup_{i \in I} S_i$ por hipótese, isso implicará que $X \subseteq Y$ e, consequentemente, que $Y = X$.

Como $Y \neq \emptyset$ e $X = \bigcup_{i \in I} S_i$, então existe $i \in I$ tal que $Y \cap S_i \neq \emptyset$. Fixe tal i . Como S_i é conexo e Y é aberto e fechado por hipótese, isso implica que $S_i \subseteq Y$ (ver Lema 23.6). Daí e da hipótese de que $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ para todos $i \neq j \in I$, segue que $\emptyset \neq S_i \cap S_j \subseteq Y \cap S_j$ para todo $j \in I$. Como S_j é conexo e Y é aberto e fechado por hipótese, isso implica que $S_j \subseteq Y$ para todo $j \in I$ (ver Lema 23.6). $\square$

O resultado acima admite uma reformulação especialmente útil: um espaço topológico é conexo se, e somente se, quaisquer dois de seus pontos podem ser conectados por um subespaço conexo. Esse corolário torna a conexidade uma propriedade intrínseca dos pontos do espaço e será a ferramenta que usaremos para verificar a conexidade de $\mathbb{R}^n$.

Corolário 23.8. Um espaço topológico X é conexo se, e somente se, para todos $x, y \in X$, existe um subespaço topológico conexo $S \subseteq X$ tal que $x, y \in S$.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, observe que, se X for conexo, então X é um subespaço topológico conexo de X que contém x e y para todos os pontos $x, y \in X$. Para mostrar a parte *se*, suponha que, para todos $x, y \in X$, exista um subespaço topológico conexo $S_{x,y} \subseteq X$ tal que $x, y \in S_{x,y}$. Defina $S_y := \bigcup_{x \in X} S_{x,y}$ e observe que $X = \bigcup_{y \in X} S_y$. Como $S_{x,y}$ é conexo para todo $x \in X$, então S_y é conexo para todo $y \in X$ (pela Proposição 23.7) e, conseqüentemente, X também é conexo (pela Proposição 23.7). $\square$

Com o Corolário 23.8 em mãos, verificar a conexidade de $\mathbb{R}^n$ torna-se uma tarefa direta: basta mostrar que quaisquer dois pontos de $\mathbb{R}^n$ podem ser ligados por uma reta, que é um subespaço homeomorfo a $\mathbb{R}$ e, portanto, conexo.

Exemplo 23.9. Considere $n > 0$ e o conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da sua topologia usual. Vamos mostrar que $\mathbb{R}^n$ é um espaço topológico conexo. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, considere o subconjunto $S_{x,y} := \{x + \lambda(y - x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Quando $x = y$, temos que $S_{x,y} = \{x\}$ é conexo pelo Exemplo 23.2. Quando $x \neq y$, a função $\phi_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow S_{x,y}$ dada por $\phi_{x,y}(\lambda) = x + \lambda(y - x)$ é um homeomorfismo. Como $\mathbb{R}$ é um espaço topológico conexo (ver Exemplo 23.5), isso implica que $S_{x,y}$ é um subespaço conexo de $\mathbb{R}^n$ que contém x e y . Assim, segue do Corolário 23.8 que $\mathbb{R}^n$ também é um espaço topológico conexo.

Vamos encerrar essa aula com um exercício que explora como a conexidade se comporta sob a operação de fecho. Em particular, veremos que o fecho de um conjunto conexo é sempre conexo, e que a recíproca dessa afirmação é falsa.

Exercício 23.4. Sejam X um espaço topológico e Y um subespaço de X .

- Mostre que, se Y for conexo e $Y \subseteq Y' \subseteq \overline{Y}$, então Y' também é conexo.
- Encontre um exemplo de um espaço topológico X e um subespaço Y de X tais que $\overline{Y}$ seja conexo e Y seja desconexo.

Resolução (Daniel). (a) Vamos mostrar a contrapositiva. Suponha que Y e Y' sejam subconjuntos de um espaço topológico X tais que $Y \subseteq Y' \subseteq \overline{Y}$. Vamos mostrar que, se Y' for desconexo, então Y também é desconexo. De fato, se o subespaço topológico Y' for desconexo, então existem subconjuntos abertos próprios e disjuntos $A_1, A_2 \subseteq Y'$ tais que $Y' = A_1 \cup A_2$. Pela definição da topologia induzida, isso significa que existem subconjuntos abertos $\tilde{A}_1$ e $\tilde{A}_2$ em X , tais que $A_1 = Y' \cap \tilde{A}_1$ e $A_2 = Y' \cap \tilde{A}_2$. Defina $B_1 := Y \cap \tilde{A}_1$ e $B_2 := Y \cap \tilde{A}_2$. Vamos mostrar que B_1 e B_2 são subconjuntos abertos próprios e disjuntos de Y tais que $Y = B_1 \cup B_2$. Isso implicará que Y é desconexo.

Como $\tilde{A}_1$ e $\tilde{A}_2$ são abertos de X , então $Y \cap \tilde{A}_1$ e $Y \cap \tilde{A}_2$ são abertos de Y . Além disso, como

$$B_1 \cap B_2 = (Y \cap \tilde{A}_1) \cap (Y \cap \tilde{A}_2) \subseteq (Y' \cap \tilde{A}_1) \cap (Y' \cap \tilde{A}_2) = A_1 \cap A_2 = \emptyset,$$

então B_1 e B_2 são abertos disjuntos de Y . Ainda mais, observe que

$$\begin{aligned} Y &= Y \cap Y' \\ &= Y \cap (A_1 \cup A_2) \\ &= (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2) \\ &= (Y \cap Y' \cap \tilde{A}_1) \cup (Y \cap Y' \cap \tilde{A}_2) \\ &= (Y \cap \tilde{A}_1) \cup (Y \cap \tilde{A}_2) \\ &= B_1 \cup B_2. \end{aligned}$$

Para concluir, vamos verificar que B_1 e B_2 são não vazios. Como A_1 é não vazio por hipótese, podemos escolher $a_1 \in A_1$. Lembre que $A_1 = Y' \cap \tilde{A}_1$ e que $Y' \subseteq \overline{Y}$. Isso implica que $a_1 \in \overline{Y} \cap \tilde{A}_1$, ou seja, que $a_1 \in \overline{Y}$ e que $\tilde{A}_1$ é uma vizinhança (aberta) de a_1 em X . Assim, pela Proposição 5.16, temos que $Y \cap \tilde{A}_1 \neq \emptyset$. Isso mostra que B_1 é não vazio. A verificação de que B_2 também é não vazio é completamente análoga.

- (b) Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. Lembre do Exercício 23.2 que o conjunto $Y := (-1, 0) \cup (0, 1)$ é desconexo, porque não é um intervalo. No entanto, seu fecho, $\overline{Y} = [-1, 1]$ é um conjunto conexo, porque é um intervalo. $\square$

AULA 24

Nessa primeira parte da aula, vamos continuar o conteúdo da aula anterior e apresentar mais três resultados sobre conexidade. O primeiro estabelece que a imagem contínua de um espaço conexo é conexa, o segundo aplica esse resultado para caracterizar a conexidade de produtos de espaços topológicos, e o terceiro generaliza o Teorema do Valor Intermediário do Cálculo.

Proposição 24.1. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Se X for conexo e f for contínua e sobrejetora, então Y é conexo.

Demonstração. Seja S um subconjunto aberto e fechado de Y . Vamos mostrar que, se $S \neq \emptyset$, então $S = Y$. Como f é sobrejetora, se $S \neq \emptyset$, então $f^{-1}(S) \neq \emptyset$. Além disso, como f é contínua e S é um subconjunto aberto e fechado de Y , então $f^{-1}(S)$ é um subconjunto aberto e fechado de X . Como X é conexo, se $f^{-1}(S)$ é um subconjunto não vazio, aberto e fechado de X , então $f^{-1}(S) = X$. Isso significa que $f(x) \in S$ para todo $x \in X$, ou seja, $\text{im}(f) \subseteq S$. Como f é sobrejetora, isso implica que $Y \subseteq S$ e, conseqüentemente, que $S = Y$. $\square$

A proposição acima tem vários corolários. Por exemplo, ela implica que quocientes de espaços conexos são conexos, porque aplicações quocientes são contínuas e sobrejetoras. Ela também garante que a conexidade é preservada pelas projeções canônicas de produtos de espaços topológicos. No próximo resultado, vamos mostrar que um produto de espaços topológicos é conexo, se e somente se, cada fator é conexo.

Corolário 24.2. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e considere o produto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ munido da sua topologia produto. Os espaços topológicos X_i são conexos se, e somente se, X é conexo.

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, lembre que, para todo $i \in I$, a função $\pi_i : X \rightarrow X_i$ é contínua e sobrejetora. Assim, se X for conexo, então $\pi_i(X) = X_i$ também é conexo (pela Proposição 24.1).

Para mostrar a parte *se*, suponha que os espaços topológicos X_i sejam todos conexos. Depois, fixe $\chi \in X$ e defina o conjunto Y_χ como sendo

$\{\gamma \in X \mid \text{existe um subconjunto finito } J \subseteq I \text{ tal que } \gamma(j) \neq \chi(j) \text{ somente se } j \in J\}.$

Vamos mostrar que Y_χ é conexo e que $X = \overline{Y_\chi}$. Pelo Exercício 23.4, isso vai implicar que X é conexo.

Primeiro, vamos mostrar que Y_χ é conexo. Para isso, vamos mostrar que, para todo $\gamma \in Y_\chi$, existe um subconjunto conexo $C_\gamma \subseteq Y_\chi$ tal que $\chi, \gamma \in C_\gamma$. Pela Proposição 23.7, isso vai implicar que Y_χ é conexo. Para construir o conjunto C_γ , vamos começar fixando $\gamma \in Y_\chi$. Por construção, existe um subconjunto finito $J_\gamma \subseteq I$ tal que $\gamma(i) = \chi(i)$ para todo $i \in I \setminus J_\gamma$. Como J_γ é um conjunto finito, podemos escrever $J_\gamma = \{j_1, \dots, j_n\}$. Usando essa notação, defina conjuntos $C_1, C_2, \dots, C_n$ da

seguinte forma:

$$C_k := \prod_{i \in I} C_{k,i}, \quad \text{onde} \quad C_{k,i} = \begin{cases} \{\chi(j_k)\}, & \text{se } i \in \{j_1, \dots, j_{k-1}\}, \\ X_{j_k}, & \text{se } i = j_k, \\ \{\gamma(i)\}, & \text{se } i \notin \{j_1, \dots, j_k\}. \end{cases}$$

Observe que os conjuntos $C_1, C_2, \dots, C_n$ são conexos, porque eles são homeomorfos a $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_n}$, respectivamente. Depois observe que $\gamma \in C_1$, que $C_k \cap C_{k+1} \neq \emptyset$, e que $\chi \in C_n$. Assim, segue da Proposição 23.7 que $C_\gamma := C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_n$ é um conjunto conexo que contém χ e γ . Pela Proposição 23.7, isso implica que Y_χ é conexo.

Agora vamos mostrar que $X = \overline{Y_\chi}$. Para isso, vamos mostrar que $U \cap Y_\chi \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}_\zeta$ e todo $\zeta \in X$. Pela Proposição 5.16, isso implicará que $X = \overline{Y_\chi}$. Vamos começar fixando $\zeta \in X$ e $U \in \mathcal{U}_\zeta$. Como U é uma vizinhança de ζ em X , então existe uma família de subconjuntos abertos $A_i \subseteq X_i$ tal que $\zeta \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq U$ e $A_i \not\subseteq X_i$ somente se i pertence a um subconjunto finito $J \subseteq I$. Defina um elemento $\alpha \in X$ como sendo

$$\alpha(i) = \begin{cases} \zeta(j), & \text{se } j \in J, \\ \chi(i), & \text{se } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

Observe que $\alpha \in \prod_{i \in I} A_i \subseteq U$ e que $\alpha \in Y_\chi$. Isso mostra que $U \cap Y_\chi \neq \emptyset$ e implica que $X = \overline{Y_\chi}$. $\square$

Como os subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ são os seus intervalos (ver Exercício 23.2), a Proposição 24.1 implica que a imagem de uma função contínua definida em um espaço conexo e tomando valores em $\mathbb{R}$ é sempre um intervalo. O próximo resultado formaliza essa observação e é conhecido como Teorema do Valor Intermediário nos cursos de Cálculo.

Corolário 24.3. Seja X um espaço topológico, considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido da sua topologia usual, seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e suponha que existam elementos $a, b \in X$ tais que $f(a) < f(b)$. Se X for conexo e f for contínua, então, para todo $\gamma \in (f(a), f(b))$, existe $c \in X$ tal que $f(c) = \gamma$.

Demonstração. Como X é conexo e f é contínua por hipótese, então $\text{im}(f)$ é conexa (pela Proposição 24.1). Como $\text{im}(f)$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, então ele é um intervalo (ver Exercício 23.2). Em particular, todo elemento $\gamma \in (f(a), f(b))$ pertence a $\text{im}(f)$; ou seja, existe $c \in X$ tal que $f(c) = \gamma$. $\square$

Exercício 24.1. Sejam X um espaço topológico conexo e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Mostre que f não muda de sinal, ou seja, ou $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, ou $f(x) < 0$ para todo $x \in X$.

Resolução (Israel). Vamos mostrar a contrapositiva: se X for um espaço conexo e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função contínua que muda de sinal, então existe $x \in X$ tal que $f(x) = 0$. Comece supondo que f muda de sinal. Ou seja, suponha que existam $a, b \in X$ tais que: $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)$. Como X é conexo e f é contínua por hipótese, segue do Corolário 24.3 que existe $c \in X$ tal que $f(c) = 0$. $\square$

24.1. Componentes conexas. Quando um espaço topológico não é conexo, é natural perguntar quais são os maiores pedaços conexos que o compõem. Essa ideia é formalizada pela noção de *componente conexa*, que associa a cada ponto de um espaço o maior subespaço conexo de que o contém. Nessa segunda parte da aula, vamos introduzir e estudar as propriedades fundamentais dessas componentes, mostrando, em particular, que elas formam uma partição do espaço em subconjuntos fechados.

Definição 24.4 (de componente conexa). Dados um espaço topológico não vazio X e um elemento $x \in X$, denote por $\mathcal{C}_x$ a família formada pelos subespaços conexos de X que contêm x e defina a **componente conexa** de x como sendo o subconjunto $\mathcal{C}_x := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_x} C$ de X .

Antes de estabelecer as propriedades gerais das componentes conexas, vejamos alguns exemplos concretos que ilustram a definição acima.

Exemplo 24.5. Se X for um espaço topológico conexo, então a componente conexa de todos os seus pontos é X . De fato, observe que, para todo $x \in X$, temos que $X \in \mathcal{C}_x$, ou seja, X é um subespaço conexo de X que contém x . Portanto, $X \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}_x} C = \mathcal{C}_x \subseteq X$. Isso implica que a componente conexa $\mathcal{C}_x$ é igual a X .

Por outro lado, se a componente conexa de algum ponto em um espaço topológico for igual a todo o espaço, então esse espaço topológico é conexo. De fato, se X for um espaço topológico e $\mathcal{C}_x = X$ para algum $x \in X$, então $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_x} C$. Como todo $C \in \mathcal{C}_x$ é conexo e como $x \in C_1 \cap C_2$ para todos $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_x$, segue da Proposição 23.7 que X é conexo também.

O exemplo a seguir mostra um caso concreto em que um espaço não é conexo e suas componentes conexas são subconjuntos próprios do espaço.

Exemplo 24.6. Considere a reta real munida da sua topologia usual. Lembre do Exemplo 23.5 que esse é um espaço topológico conexo. Assim, pelo Exemplo 24.5, a componente conexa de todos os seus pontos é toda a reta.

Agora considere o subespaço $S = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ de $\mathbb{R}$. Lembre do Exercício 23.2 que S não é conexo. Vamos mostrar que $\mathcal{C}_x = (-\infty, 0)$ para todo $x < 0$ e que $\mathcal{C}_x = (0, \infty)$ para todo $x > 0$. De fato, se $x < 0$, então $(-\infty, 0)$ é um subconjunto conexo de S que contém x (ver Exercício 23.2). Isso implica que $(-\infty, 0) \subseteq \mathcal{C}_x$. Para mostrar que $\mathcal{C}_x \subseteq (-\infty, 0)$, comece lembrando que $\mathcal{C}_x = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_x} C$, onde $\mathcal{C}_x$ é a família de subconjuntos conexos de S que contêm x . Assim, para mostrar que $\mathcal{C}_x \subseteq (-\infty, 0)$, basta mostrar que todo subconjunto conexo de S que contém x está contido em $(-\infty, 0)$. Para isso, fixe um subconjunto conexo C de S que contém x . Como $(-\infty, 0)$ é um subconjunto aberto e fechado de S , então $C \cap (-\infty, 0)$ é um subconjunto aberto e fechado em C . Daí, da hipótese de que C é conexo e do Lema 23.4, segue que $C \cap (-\infty, 0)$ é vazio ou é igual a C . Como $x \in C \cap (-\infty, 0)$ por hipótese, então $C \cap (-\infty, 0)$ não é vazio. Isso significa que $C \cap (-\infty, 0) = C$, ou seja, que $C \subseteq (-\infty, 0)$. Isso implica que $\mathcal{C}_x \subseteq (-\infty, 0)$, o que completa a demonstração de que $\mathcal{C}_x = (-\infty, 0)$ para todo $x < 0$. A demonstração de que $\mathcal{C}_x = (0, \infty)$ para todo $x > 0$ é completamente análoga.

O exercício a seguir propõe um caso ainda mais simples, em que o espaço tem apenas dois pontos, mas a resposta depende essencialmente da topologia escolhida.

Exercício 24.2. Considere um conjunto com 2 elementos distintos. Calcule as componentes conexas dos dois elementos desse conjunto quando ele for munido de cada uma das suas possíveis topologias.

Resolução (Mateus). Seja $X = \{a, b\}$, um conjunto com dois elementos distintos. Calculemos as componentes conexas dos pontos de X sob cada uma das suas topologias.

- (a) Topologia discreta. Segue do Exercício 23.1(b) que X munido com a topologia discreta não é conexo. Assim, o único subconjunto conexo de X que contém a é $\{a\}$ e o único subconjunto conexo de X que contém b é $\{b\}$ (ver Exemplo 23.2). Portanto, a componente conexa do ponto a é $C_a = \{a\}$ e a componente conexa do ponto b é $C_b = \{b\}$.
- (b) Topologia de Sierpinski. Segue do Exemplo 23.3 que X munido com a topologia de Sierpinski é conexo. Daí e do Exemplo 24.5, segue que $C_a = C_b = X$.
- (c) Topologia trivial. Segue do Exercício 23.1(a) que X munido com a topologia trivial é conexo. Daí e do Exemplo 24.5, segue que $C_a = C_b = X$. $\square$

Com esses exemplos em mente, podemos agora estabelecer algumas propriedades das componentes conexas. O lema a seguir mostra que elas são sempre fechadas e que formam uma partição do espaço.

Lema 24.7. Seja X um espaço topológico não vazio.

- (a) Para todo elemento x de X , a componente conexa de x é o maior subespaço conexo de X que contém x .
- (b) Para todo $x \in X$, a componente conexa C_x é fechada.
- (c) Dados $x, y \in X$, temos que: $C_x \cap C_y = \emptyset$ ou $C_x = C_y$.

Demonstração. (a) Primeiro observe que todo subconjunto $C \in \mathcal{C}_x$ é conexo e que $x \in C \cap C'$ para todos $C, C' \in \mathcal{C}_x$. Segue daí e da Proposição 23.7 que $C_x = \bigcup_{C \in \mathcal{C}_x} C$ é um subespaço conexo de X que contém x . Além disso, observe que $C \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}_x} C = C_x$ para todo $C \in \mathcal{C}_x$. Logo, a componente conexa C_x é o maior subespaço conexo de X que contém x .

- (b) Fixe $x \in X$. Como sua componente conexa C_x é um subconjunto conexo de X que contém x (pela parte (a)), então seu fecho $\overline{C_x}$ também é um subconjunto conexo de X que contém x (ver Exercício 23.4). Como C_x é o maior subconjunto conexo de X que contém x (pela parte (a)), segue daí que $\overline{C_x} \subseteq C_x$. Isso implica que a componente conexa C_x é fechada.
- (c) Fixe $x, y \in X$. Vamos mostrar que, se $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, então $C_x = C_y$. De fato, se $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, então $C_x \cup C_y$ é um subconjunto conexo de X (pela Proposição 23.7). Além disso, observe que $x, y \in C_x \cup C_y$. Como C_x é o maior subconjunto conexo de X que contém x e C_y é o maior subconjunto conexo de X que contém y

(pela parte (a)), então $C_x \cup C_y \subseteq C_x$ e $C_x \cup C_y \subseteq C_y$. A primeira continência implica que $C_y \subseteq C_x$ e a segunda implica que $C_x \subseteq C_y$. Com isso, concluímos que $C_x = C_y$. $\square$

O exemplo a seguir ilustra mais um caso concreto de componentes conexas. Nesse caso, as componentes conexas são conjuntos com apenas um ponto. Assim, elas são fechadas e disjuntas, o que ilustra o resultado acima.

Exemplo 24.8. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual e o subespaço $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ formado pelos números racionais. Vamos mostrar que as componentes conexas de $\mathbb{Q}$ são formadas exatamente por cada um de seus pontos.

Para isso, fixe um ponto $q \in \mathbb{Q}$. Queremos mostrar que $C_q = \{q\}$. Para isso, vamos mostrar que o único subconjunto conexo de $\mathbb{Q}$ que contém q é $\{q\}$. De fato, suponha que C seja um subconjunto conexo de $\mathbb{Q}$ que contém q , e seja p um número racional diferente de q . Como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ e $p \neq q$, então existe um número irracional $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que x está entre p e q : se $p < q$, então $p < x < q$; e se $q < p$, então $q < x < p$. Observe que $(-\infty, x)$ e (x, ∞) são subconjuntos abertos e disjuntos de $\mathbb{R}$. Logo, $(-\infty, x) \cap C$ e $(x, \infty) \cap C$ são subconjuntos abertos e disjuntos de C . Além disso, como $x \notin \mathbb{Q}$, então $C = ((-\infty, x) \cap C) \cup ((x, \infty) \cap C)$. Como C é conexo por hipótese, então $C \subseteq (-\infty, x)$ ou $C \subseteq (x, \infty)$. Como $q \in C$ e x está entre p e q , em ambos os casos concluímos que $p \notin C$. Portanto C não contém nenhum outro número racional e, consequentemente, $C_q = \{q\}$.

Lembre do Lema 23.4 que um espaço topológico X é conexo se, e somente se, seus únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados são $\emptyset$ e X . Além disso, observe, do Lema 24.7 e do exemplo anterior, que as componentes conexas de um espaço topológico são sempre fechadas. No entanto, o exemplo acima mostra que essas componentes conexas não são necessariamente abertas. Para garantir que as componentes conexas sejam abertas e fechadas, precisamos da hipótese adicional de que o espaço topológico seja *localmente conexo*. Esse será o tema da próxima aula.

Exercício 24.3. Considere um espaço topológico não vazio X . Defina a seguinte relação no conjunto X :

$$x \sim y \iff C_x = C_y.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em X .

Resolução (Roger). Para mostrar que a relação $\sim$ definida por

$$x \sim y \iff C_x = C_y$$

é uma relação de equivalência em X , precisamos verificar que ela é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Para verificar que $\sim$ é reflexiva, observe que $C_x = C_x$ para todo $x \in X$. Isso significa que $x \sim x$. Para verificar que $\sim$ é simétrica, observe que, se $x, y \in X$, forem tais que $x \sim y$, ou seja, $C_x = C_y$, então $C_y = C_x$ também. Isso significa que $y \sim x$. Para verificar que $\sim$ é transitiva, observe que, se $x, y, z \in X$ forem tais que $x \sim y$ e $y \sim z$, então $C_x = C_y = C_z$. Ou seja, $C_x = C_z$, o que significa exatamente

que $x \sim z$. Isso mostra que $\sim$ é uma relação reflexiva, simétrica, transitiva e, consequentemente, uma relação de equivalência. $\square$

Exercício 24.4. Sejam X e Y dois espaços topológicos não vazios e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Mostre que $f(\mathbb{C}_x) \subseteq \mathbb{C}_{f(x)}$ para todo $x \in X$.

Resolução (Zyon). Considere a restrição de f à $\mathbb{C}_x$. Ou seja, denote $\mathbb{C}_x$ por X' , denote $f(\mathbb{C}_x)$ por Y' e defina $f' : X' \rightarrow Y'$ como sendo a função dada por $f'(x) = f(x)$. Como f é contínua, então f' também é contínua (ver Proposição 7.10(a)). Além disso, observe que f' é sobrejetora. Daí e da Proposição 24.1, segue que $Y' = f(\mathbb{C}_x)$ é conexo. Além disso, como $x \in \mathbb{C}_x$, então $f(x) \in f(\mathbb{C}_x)$. Ou seja, $f(\mathbb{C}_x)$ é um subconjunto conexo de Y que contém $f(x)$. Como $\mathbb{C}_{f(x)}$ é o maior subconjunto conexo de Y que contém $f(x)$ (ver Lema 24.7(a)), concluímos que $f(\mathbb{C}_x) \subseteq \mathbb{C}_{f(x)}$. $\square$

Exercício 24.5. Mostre que os seguintes pares de espaços topológicos, munidos de suas topologias usuais, não são homeomorfos:

- (a) $[0, 1]$ e $\{0, 1\}$.
- (b) $[0, 1]$ e $[0, 1)$.
- (c) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$.
- (d) S^1 e $[0, 1]$.

AULA 25

Nesta aula, estudaremos a noção de *conexidade local*. Introduziremos a definição de espaço localmente conexo, exploraremos exemplos que ilustram as relações entre conexidade e conexidade local, e demonstramos alguns resultados, incluindo o fato de que as componentes conexas de um espaço topológico localmente conexo são abertas.

25.1. Espaços localmente conexos. A conexidade de um espaço topológico, como vimos, é uma propriedade global: ela diz respeito à estrutura do espaço inteiro. Agora, vamos introduzir a noção de *conexidade local*, que é uma propriedade inteiramente pontual: um espaço é localmente conexo quando cada ponto admite uma base de vizinhanças formada por abertos conexos.

Definição 25.1 (de espaço localmente conexo). Um espaço topológico X é dito **localmente conexo** quando todo elemento $x \in X$ tem uma base de vizinhanças formada por subespaços abertos e conexos.

A definição acima é, à primeira vista, bastante restritiva. Os exemplos a seguir exploram o alcance e os limites dessa definição. Começamos mostrando que a reta real é um espaço localmente conexo quando munida da sua topologia usual.

Exemplo 25.2. A reta real $\mathbb{R}$ munida da sua estrutura usual de espaço topológico é localmente conexa. Para justificar essa afirmação, lembre que os intervalos abertos em $\mathbb{R}$ são conexos (ver Exercício 23.2). Isso implica que a família

$$\mathcal{B}_x = \{(x - r, x + r) \mid r > 0\}$$

é uma base de vizinhanças formada por abertos conexos para todo ponto $x \in \mathbb{R}$ (ver Exemplo 4.10).

O exemplo acima mostra que a reta real munida da sua topologia usual é localmente conexa. Como ela também é conexa, uma pergunta natural é se conexidade e conexidade local são equivalentes. Os dois exemplos a seguir mostram que esses conceitos são completamente independentes: existem espaços conexos que não são localmente conexos, e espaços localmente conexos que não são conexos.

Exemplo 25.3. Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido da sua topologia usual e o subespaço $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y = \sin(1/x)\}$. Vamos mostrar que $\overline{S}$ é conexo e não é localmente conexo.

Para justificar a afirmação que $\overline{S}$ é conexo, comece observando que S é a imagem da função $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x) = (x, \sin(1/x))$. Como a função ϕ é contínua em cada coordenada, $(\pi_1 \circ \phi) = \text{id}_{(0, \infty)}$ e $(\pi_2 \circ \phi)(x) = \sin(1/x)$, então ϕ é uma função contínua (ver Proposição 9.5(d)). Como o intervalo $(0, \infty)$ é conexo (ver Exercício 23.2), então S é a imagem de um espaço conexo por uma função contínua. Daí e da Proposição 24.1, segue que S é conexo e, consequentemente, que $\overline{S}$ também é conexo (ver Exercício 23.4).

Agora, para justificar a afirmação de que $\overline{S}$ não é localmente conexo, primeiro observe que $\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Depois, considere o ponto $(0, 0) \in \overline{S}$ e observe que $\overline{S} \cap B((0, 0), 1/2)$ é uma vizinhança de $(0, 0)$ em $\overline{S}$ que não contém nenhum aberto conexo, por ser a união disjunta de infinitos segmentos de curvas. Assim, toda base de vizinhanças abertas de $(0, 0)$ necessariamente contém um conjunto desconexo. Isso significa que $\overline{S}$ não é localmente conexo.

O exemplo acima mostra que nem todo espaço topológico conexo é localmente conexo. O exemplo a seguir mostra que a situação inversa também é possível: um espaço pode ser localmente conexo em cada um de seus pontos sem ser conexo.

Exemplo 25.4. Considere o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munido da sua topologia discreta. Por definição, todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ é aberto e fechado. Como $\mathbb{Z}$ contém subconjuntos próprios (abertos e fechados), segue do Lema 23.4 que $\mathbb{Z}$ não é conexo. Mas $\mathbb{Z}$ é localmente conexo. Para justificar essa afirmação, primeiro lembre que $\mathcal{B}_z = \{\{z\}\}$ é uma base de vizinhanças de todo z em $\mathbb{Z}$. Pelo Exemplo 23.2, todo conjunto com um elemento, $\{z\} \subseteq \mathbb{Z}$, é conexo. Além disso, $\{z\}$ também é aberto em $\mathbb{Z}$. Assim, temos que $\mathcal{B}_z = \{\{z\}\}$ é uma base de vizinhanças abertas e conexas para todo $z \in \mathbb{Z}$. Isso mostra que $\mathbb{Z}$ é um espaço topológico localmente conexo que não é conexo, quando munido da topologia discreta.

Vamos concluir essa série de exemplos com um exercício que mostra que o subespaço formado pelos números racionais dentro da reta real não é conexo, nem localmente conexo. Em particular, esse exercício ilustra o fato de que subespaços arbitrários de espaços localmente conexos não são necessariamente localmente conexos.

Exercício 25.1. Considere a reta real $\mathbb{R}$ munida da sua topologia usual. Mostre que o subespaço de $\mathbb{R}$ formado pelos números racionais $\mathbb{Q}$ não é conexo, nem localmente conexo.

Resolução (Angie). Considere o subconjunto $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ munido com a topologia induzida da topologia usual de $\mathbb{R}$. Vamos mostrar que $\mathbb{Q}$ não é conexo e $\mathbb{Q}$ não é localmente conexo.

Para mostrar que $\mathbb{Q}$ não é conexo, comece fixando um número irracional a . Depois, defina $A := \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)$ e $B := \mathbb{Q} \cap (a, \infty)$. Como $(-\infty, a)$ e (a, ∞) são abertos em $\mathbb{R}$, então A e B são abertos em $\mathbb{Q}$ (munido da topologia induzida). Além disso, observe que a densidade dos racionais em $\mathbb{R}$ garante que existem racionais menores e maiores que a , ou seja, que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Observe também que $\mathbb{Q} = A \cup B$, porque $a \notin \mathbb{Q}$ e todo número racional é ou menor, ou igual, ou maior que a . Por fim, observe que

$$A \cap B = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, a)) \cap (\mathbb{Q} \cap (a, \infty)) = \mathbb{Q} \cap (-\infty, a) \cap (a, \infty) = \emptyset.$$

Isso mostra que A e B são abertos disjuntos de $\mathbb{Q}$ tais que $A \cup B = \mathbb{Q}$, e consequentemente, que $\mathbb{Q}$ é desconexo.

Para mostrar que $\mathbb{Q}$ não é localmente conexo, vamos mostrar que todo subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{Q}$ é desconexo. Isso implicará que não existem bases de

vizinhanças abertas e conexas para nenhum ponto de $\mathbb{Q}$. Seja V um aberto não vazio em $\mathbb{Q}$ e seja q um ponto de V . Como $q \in V$ e V é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $(q - \delta, q + \delta) \cap \mathbb{Q} \subseteq V$. Como o conjunto de números irracionais é denso em $\mathbb{R}$, existe um número irracional $a \in (q - \delta, q + \delta)$. Defina $A := V \cap (-\infty, a)$ e $B := V \cap (a, \infty)$. Usando um argumento completamente análogo ao argumento usado no parágrafo anterior, podemos mostrar que A e B são abertos e disjuntos de V tais que $A \cup B = V$. Isso mostra V é desconexo e, conseqüentemente, que não existem abertos não vazios e conexas em $\mathbb{Q}$. Logo, não existem bases de vizinhanças abertas e conexas dos pontos em $\mathbb{Q}$. Portanto, $\mathbb{Q}$ não é localmente conexo. $\square$

Nesta segunda parte da aula, vamos desenvolver alguns resultados sobre espaços localmente conexos. O ponto central é uma caracterização da conexidade local em termos das componentes conexas de subconjuntos abertos, que nos permite, em particular, concluir que as componentes conexas de um espaço localmente conexo são sempre conjuntos abertos.

Proposição 25.5. Um espaço topológico X é localmente conexo se, e somente se, para todo subconjunto aberto $A \subseteq X$ e todo ponto $a \in A$, a componente conexa de a em A é aberta em X .

Demonstração. Para mostrar a parte *somente se*, suponha que X seja um espaço topológico localmente conexo. Fixe um subconjunto aberto $A \subseteq X$ e um elemento $a \in A$. Denote por $\mathcal{C}_{a,A}$ a componente conexa de a em A . Vamos mostrar que $\mathcal{C}_{a,A}$ é aberta em X . Para isso, fixe $x \in \mathcal{C}_{a,A}$. Como $x \in \mathcal{C}_{a,A} \subseteq A$ e x tem uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ formada de conjuntos conexas e abertos, então existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq A$. Como $x \in B$ e B é conexo, então $B \subseteq \mathcal{C}_{a,A}$ (pelo Lema 24.7(a)); e como B é aberto, então $x \in \mathcal{C}_{a,A}^\circ$. Isso mostra que $\mathcal{C}_{a,A} \subseteq \mathcal{C}_{a,A}^\circ$. Pelo Lema 5.5(a) isso significa que a componente conexa $\mathcal{C}_{a,A}$ é aberta.

Para mostrar a parte *se*, suponha que, para todo subconjunto aberto $A \subseteq X$ e todo ponto $a \in A$, a componente conexa de a em A seja aberta em X . Para cada $x \in X$, considere a família

$$\mathcal{B}_x := \{B \subseteq X \mid x \in B \text{ e } B \text{ é aberta e conexa}\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x em X . De fato, dado $x \in X$ e $U \in \mathcal{U}_x$, como $x \in U^\circ$ e U° é aberto em X , então a componente conexa de x em U° é aberta em X (por hipótese). Conseqüentemente, essa componente conexa $\mathcal{C}_{x,U^\circ}$ pertence à $\mathcal{B}_x$. Como $\mathcal{C}_{x,U^\circ} \in \mathcal{B}_x$ e $x \in \mathcal{C}_{x,U^\circ} \subseteq U$, então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x . Como os subconjuntos da família $\mathcal{B}_x$ são abertos e conexas, nós concluímos que X é localmente conexo. $\square$

A proposição acima oferece uma outra forma de verificar a conexidade local de um espaço, em termos das componentes conexas. Como uma aplicação direta, obtemos que as componentes conexas em espaços localmente conexos são abertas e fechadas.

Corolário 25.6. Se X for um espaço topológico não vazio e localmente conexo, então as componentes conexas de todos os pontos de X são abertas e fechadas em X .

Demonstração. Esse resultado segue direto do Lema 24.7(b) e da Proposição 25.5. $\square$

O corolário acima mostra que, em espaços localmente conexos, as componentes conexas formam uma partição de X em abertos e fechados. Em geral, as componentes conexas de um espaço topológico são sempre fechadas (pelo Lema 24.7(b)), mas não necessariamente são abertas. É precisamente a conexidade local que garante essa propriedade adicional. O exercício a seguir explora duas situações em que também se pode concluir que as componentes conexas são simultaneamente abertas e fechadas, mesmo sem supor conexidade local.

Exercício 25.2. Seja X um espaço topológico não vazio.

- (a) Se X tiver uma quantidade finita de componentes conexas distintas, mostre que todas as suas componentes conexas são abertas e fechadas.
- (b) Se X for um espaço topológico compacto e localmente conexo, mostre que X tem uma quantidade finita de componentes conexas.

Resolução (Celso). (a) Suponha que X seja um espaço topológico que tenha uma quantidade finita de componentes conexas distintas, $C_1, C_2, \dots, C_n$. Como todo ponto pertence a sua própria componente conexa, segue que

$$X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{C}_x = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n.$$

Daí e do fato que $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$ (ver Lema 24.7), obtemos que

$$C_i = X \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_n) \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Agora lembre que toda componente conexa é fechada (ver Lema 24.7(b)) e que a união finita de subconjuntos fechados é fechada. Isso implica que os subconjuntos $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_n$ são fechados e, conseqüentemente, que as componentes conexas C_i são abertas em X .

- (b) Suponha que X seja um espaço localmente conexo e compacto. Lembre que, como todo ponto pertence a sua componente conexa, então $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{C}_x$. Agora, lembre da Proposição 25.5 que, como X é localmente conexo por hipótese, suas componentes conexas são abertas. Isso significa que $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{C}_x$ é uma cobertura aberta de X . Depois, observe que, como X também é compacto por hipótese, podemos extrair uma subcobertura finita; ou seja, existe um subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ tal que $X = \mathcal{C}_{x_1} \cup \mathcal{C}_{x_2} \cup \dots \cup \mathcal{C}_{x_n}$. Como as componentes conexas de um espaço são ou iguais, ou disjuntas (ver Lema 24.7(c)), segue daí que X tem finitas componentes conexas distintas. $\square$

Vamos concluir essa aula com dois exercícios que estabelecem condições para que imagens de espaços localmente conexos por funções contínuas e produtos de espaços localmente conexos sejam localmente conexos.

Exercício 25.3. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Suponha que X seja um espaço localmente conexo. Encontre condições sobre f para garantir que Y também seja localmente conexo.

Exercício 25.4. Mostre que o produto $\prod_{i \in I} X_i$ é localmente conexo se, e somente se, todos os espaços X_i são localmente conexos e todos os espaços X_i são conexos, exceto possivelmente uma quantidade finita deles.

AULA 26

Nesta aula, vamos concluir o estudo das diversas propriedades de espaços topológicos, apresentando a noção de conexidade por caminhos. Enquanto a conexidade usual lida com a impossibilidade de cobrir um espaço em dois abertos disjuntos não vazios, a conexidade por caminhos formaliza a ideia de que podemos caminhar de qualquer ponto a qualquer outro dentro de um espaço sem sair dele.

26.1. Espaços conexos por caminhos. Vamos começar introduzindo a definição formal desse conceito. Em seguida, analisaremos exemplos de espaços conexos por caminhos e de espaços que não o são. Para concluir, estudaremos o comportamento dessa propriedade sob funções contínuas e produtos.

Definição 26.1 (de espaço conexo por caminhos). Um espaço topológico X é dito **conexo por caminhos** quando, para quaisquer dois pontos $x, y \in X$, existe um caminho em X ligando x a y , ou seja, existe uma função contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Com a definição formal estabelecida, vamos aplicá-la a exemplos simples antes de avançarmos para estruturas topológicas mais complexas. O primeiro caso que consideraremos é o de um espaço constituído por um único elemento.

Exemplo 26.2. Seja $X = \{\bullet\}$ um espaço topológico com um único elemento, equipado com a sua única topologia, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Para quaisquer dois pontos em X (que, por trivialidade, devem ser ambos iguais a $\bullet$), podemos definir a função constante $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, dada explicitamente por $\gamma(t) = \bullet$ para todo $t \in [0, 1]$. Como as imagens inversas dos abertos de X sob γ são abertos ($\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $\gamma^{-1}(X) = [0, 1]$), a função γ é contínua. Além disso, $\gamma(0) = \bullet$ e $\gamma(1) = \bullet$. Portanto, X é conexo por caminhos.

Uma vez verificado que espaços com um único elemento são conexos por caminhos, uma extensão natural é considerar espaços com dois elementos. O próximo exercício mostra que a conexidade por caminhos de um espaço com dois elementos depende da topologia com a qual ele é munido.

Exercício 26.1. Considere um conjunto com dois elementos distintos. Determine em relação a quais topologias esse conjunto é um espaço topológico conexo por caminhos.

Resolução (Mateus). (a) Topologia discreta. Como $[0, 1]$ é um espaço conexo (ver Exercício 23.2), segue da Proposição 24.1 que a imagem de qualquer função contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{a, b\}$ deve ser um subconjunto conexo de $\{a, b\}$. Na topologia discreta, os únicos subconjuntos conexos não vazios são os unitários (ver Exercício 24.2). Logo, toda função contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{a, b\}$ é constante. Isso significa que, nesse caso, não existem caminhos em X ligando a a b . Portanto, o conjunto $\{a, b\}$ munido da topologia discreta não é conexo por caminhos.

- (b) Topologia de Sierpinski, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Para mostrar que o conjunto $\{a, b\}$ é conexo por caminhos quando munido dessa topologia de Sierpinski, vamos começar construindo uma função contínua $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \{a, b\}$ tal que $\gamma_1(0) = a$ e $\gamma_1(1) = b$. Concretamente, defina $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \{a, b\}$ por

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} a, & \text{se } t \in [0, 1) \\ b, & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Observe que γ_1 é contínua, porque $\gamma_1^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\gamma_1^{-1}(\{a\}) = [0, 1)$, que é aberto em $[0, 1]$, e $\gamma_1^{-1}(\{a, b\}) = [0, 1]$. Além disso, observe que $\gamma_1(0) = a$ e $\gamma_1(1) = b$ por construção.

Agora, vamos construir uma função contínua $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \{a, b\}$ tal que $\gamma_2(0) = b$ e $\gamma_2(1) = a$. Concretamente, defina

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} b, & \text{se } t = 0, \\ a, & \text{se } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

Observe que γ_2 é contínua, porque $\gamma_2^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\gamma_2^{-1}(\{a\}) = (0, 1]$, que é aberto em $[0, 1]$, e $\gamma_2^{-1}(\{a, b\}) = [0, 1]$. Além disso, observe que $\gamma_2(0) = b$ e $\gamma_2(1) = a$ por construção. Isso mostra que existem caminhos ligando os dois pontos do conjunto $\{a, b\}$, o que significa que esse conjunto é conexo por caminhos quando munido com essa topologia de Sierpinski.

- (c) Topologia trivial. Toda função $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{a, b\}$ é contínua, porque $\gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $\gamma^{-1}(\{a, b\}) = [0, 1]$. Em particular, a função $\gamma : [0, 1] \rightarrow \{a, b\}$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} a, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ b, & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

é contínua e satisfaz $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$. Isso mostra que o conjunto $\{a, b\}$ é conexo por caminhos quando munido da topologia trivial. $\square$

A análise de espaços finitos evidencia que a conexidade por caminhos depende crucialmente da disponibilidade de funções contínuas que conectem pares de pontos do espaço. Afastando-nos de exemplos finitos, vamos considerar a reta real munida de sua topologia usual.

Exemplo 26.3. A reta real $\mathbb{R}$, munida de sua topologia usual, é um espaço conexo por caminhos. De fato, dados dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$, defina a função $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\gamma(t) := (1-t)x + ty$. Como γ é uma função afim em t , ela é contínua em relação à topologia usual de $\mathbb{R}$. Além disso, observe que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Isso justifica a afirmação de que $\mathbb{R}$ é conexo por caminhos quando munida da sua topologia usual.

Do ponto de vista da topologia geral, a reta real pode ser dotada de outras topologias além da usual. O exercício a seguir determina em relação a quais delas a reta real é conexa por caminhos.

Exercício 26.2. Determine em relação a quais topologias a reta real é um espaço topológico conexo por caminhos.

Após examinarmos alguns exemplos, vamos estabelecer os primeiros resultados teóricos, começando pela relação entre conexidade por caminhos e a noção clássica de conexidade.

Lema 26.4. Todo espaço conexo por caminhos é conexo.

Demonstração. Suponha que X seja um espaço topológico não vazio e conexo por caminhos. Por definição, isso significa que, para quaisquer $x, y \in X$, existe uma função contínua $\gamma_{x,y} : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma_{x,y}(0) = x$ e $\gamma_{x,y}(1) = y$. Como $[0, 1]$ é conexo (ver Exercício 23.2) e $\gamma_{x,y}$ é contínua (por hipótese), a sua imagem é um subconjunto conexo de X . Fixe um ponto $x_0 \in X$ e denote a imagem da função $\gamma_{x_0,y}$ por $C_{x_0,y}$. Observe que $X = \bigcup_{y \in X} C_{x_0,y}$, porque $y = \gamma_{x_0,y}(1) \in C_{x_0,y}$ para todo $y \in X$. Como $x_0 = \gamma_{x_0,y}(0) \in C_{x_0,y}$ para todo $y \in X$, ou seja, como os subconjuntos conexos $C_{x_0,y}$ sempre se intersectam, segue da Proposição 23.7 que X é conexo. $\square$

O lema acima garante que todo espaço conexo por caminhos é conexo. É natural questionar se a recíproca também é verdadeira, ou seja, se todo espaço conexo também é conexo por caminhos. O exemplo a seguir mostra que não.

Exemplo 26.5. Considere o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ munido da sua topologia usual, considere o subconjunto $S = \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$ e o seu fecho,

$$\bar{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1]),$$

munido da topologia induzida. Lembre do Exemplo 25.3 que $\bar{S}$ é um subespaço conexo. Vamos mostrar agora que $\bar{S}$ não é conexo por caminhos.

Suponha $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{S}$ seja uma função tal que $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma(1) = (1, \sin(1))$. Vamos mostrar que γ não é contínua. Isso implicará que não existem caminhos ligando $(0, 0)$ e $(1, \sin(1))$ em $\bar{S}$, ou seja, que $\bar{S}$ não é conexo por caminhos.

Para cada $t \in [0, 1]$, denote $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, onde $\gamma_1 = \pi_1 \circ \gamma$ e $\gamma_2 = \pi_2 \circ \gamma$ são as coordenadas de γ em $\mathbb{R}^2$. Lembre da Proposição 9.5(d) que γ é contínua se, e somente se, γ_1 e γ_2 são contínuas. Assim, para mostrar que γ não é contínua, vamos mostrar que γ_1 ou γ_2 não são contínuas.

Para começar, considere o conjunto $\gamma_1^{-1}(0)$. Se esse conjunto não for fechado, então γ_1 não será contínua e, conseqüentemente, γ não será contínua. Caso contrário, o conjunto $\gamma_1^{-1}(0)$ será fechado. Observe que esse conjunto também é não vazio, pois $\gamma_1(0) = 0$. Defina $t_0 := \sup \gamma_1^{-1}(0)$. Vamos mostrar que o limite $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \gamma_2(t)$ não existe. Isso implicará que γ_2 não será contínua em t_0 e, conseqüentemente, que γ não é contínua.

Como $\gamma_1^{-1}(0)$ é fechado, então $t_0 = \sup \gamma_1^{-1}(0) \in \gamma_1^{-1}(0)$, ou seja, $\gamma_1(t_0) = 0$. Além disso, como $\gamma_1(1) = 1$, então $t_0 < 1$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 + 1/k \leq 1$ para todo $k > k_0$. Além disso, pela definição de supremo, $\gamma_1(t) > 0$ para todo $t \in (t_0, 1]$. Em particular, $\gamma(t) \in S$ e

$$\gamma_2(t) = \sin\left(\frac{1}{\gamma_1(t)}\right) \quad \text{para todo } t \in \{t_0 + 1/k \mid k > k_0\}.$$

Considere a sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}.$$

Observe que essa sequência converge para 0. Em particular, para todo $k > k_0$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_k} < \gamma_1(t_0 + 1/k)$. Escolha n_k com a mesma paridade de k : ou seja, se k for par, escolha n_k par, e se k for ímpar, escolha n_k ímpar. Como $\gamma_1(t_0) = 0 < a_{n_k} < \gamma_1(t_0 + 1/k)$, o Teorema do Valor Intermediário (Corolário 24.3) implica que: ou γ_1 não é contínua, ou existe $s_k \in (t_0, t_0 + 1/k)$ tal que $\gamma_1(s_k) = a_{n_k}$. No primeiro caso, teríamos que γ não é contínua (ver Proposição 9.5(d)). No segundo caso, teríamos que $\{s_k\}_{k > k_0}$ é uma sequência que converge para t_0 e

$$\gamma_2(s_k) = \sin\left(\frac{1}{\gamma_1(s_k)}\right) = \sin\left(\frac{1}{a_{n_k}}\right) = (-1)^k$$

não converge. Isso mostra que γ_2 não é contínua e, consequentemente, γ também não é.

O exemplo acima mostra que a recíproca do Lema 26.4 não é verdadeira: existem espaços conexos que não são conexos por caminhos. O exemplo a seguir é uma aplicação da contrapositiva do Lema 26.4 e ilustra que subespaços de espaços conexos por caminhos não precisam ser conexos por caminhos.

Exemplo 26.6. Pelo Exercício 23.2, os únicos subespaços conexos da reta real são os intervalos (abertos, semiabertos e fechados). Em particular, o subconjunto $(-1, 0) \cup (0, 1)$, munido da topologia induzida de $\mathbb{R}$, não é conexo. Pela contrapositiva do Lema 26.4, esse subespaço também não é conexo por caminhos. Como $\mathbb{R}$ é conexo por caminhos e $(-1, 0) \cup (0, 1)$ é um subespaço seu que não é conexo por caminhos, concluímos que subespaços de espaços conexos por caminhos não precisam ser conexos por caminhos.

O fato de a conexidade por caminhos não ser herdada por subespaços arbitrários já era esperado, visto que o mesmo ocorre com a conexidade. A próxima proposição mostra que, assim como a conexidade, a conexidade por caminhos também é preservada por funções contínuas.

Proposição 26.7. Sejam X e Y dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Se X for conexo por caminhos e f for contínua e sobrejetora, então Y também é conexo por caminhos.

Demonstração. Suponha que X seja um espaço topológico conexo por caminhos e que $f : X \rightarrow Y$ seja uma função contínua e sobrejetora. Vamos mostrar que Y também é conexo por caminhos. Para isso, comece fixando dois pontos $y_0, y_1 \in Y$. Vamos construir um caminho $[0, 1] \rightarrow Y$ que começa em y_0 e termina em y_1 . Para isso, comece observando que, como $f : X \rightarrow Y$ é uma função sobrejetora por hipótese, então existem pontos $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Depois, observe que, como X é o espaço topológico conexo por caminhos, então existe uma

função contínua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Logo, a função composta $(f \circ \gamma) : [0, 1] \rightarrow Y$ é uma função contínua (ver Exemplo 6.4) tal que

$$(f \circ \gamma)(0) = f(\gamma(0)) = f(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad (f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1)) = f(x_1) = y_1.$$

Isso mostra que Y é conexo por caminhos. $\square$

A preservação da conexidade por caminhos por imagens de funções contínuas tem diversas consequências. Em particular, se um produto de espaços topológicos for conexo por caminhos, então cada fator também será conexo por caminhos, pois as projeções são funções contínuas e sobrejetoras. Vamos concluir esta aula estabelecendo condições sobre os fatores que garantem que o produto seja conexo por caminhos.

Exercício 26.3. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos. Mostre que o produto $\prod_{i \in I} X_i$ é conexo por caminhos se, e somente se, todos os espaços X_i são conexos por caminhos.